

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA



**OS COMENTÁRIOS DE WITTGENSTEIN
SOBRE O TEOREMA DE GÖDEL**

Projeto de Pós-Doutorado

Supervisor: Prof. Dr. João Vergílio Gallerani Cuter

Candidato: Anderson Luis Nakano

Resumo: O objetivo do projeto é fornecer uma análise rigorosa e unitária dos comentários tardios de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel compatível com a filosofia madura do autor. A despeito da recepção inicial negativa destes comentários (que ajudaram a criar um abismo entre as observações do filósofo sobre a linguagem/psicologia e as suas observações sobre a matemática), recentes trabalhos surgiram com o propósito de contextualizar e oferecer uma leitura mais positiva das observações de Wittgenstein sobre Gödel, mostrando que a apreciação negativa destas observações eram frutos de uma leitura equivocada das passagens e da falta de contextualização filosófica necessária para o seu entendimento. Em geral, estes trabalhos acabam incluindo, em sua explicação, textos do “período intermediário” da filosofia de Wittgenstein, o que levanta evidentemente a questão da legitimidade desta transposição textual. Nesse sentido, faz-se necessário uma investigação histórica que permita uma melhor compreensão da evolução das ideias de Wittgenstein sobre a matemática a fim de estabelecer pontos de continuidade e de ruptura de suas reflexões neste domínio. Uma tal investigação, além de permitir uma leitura dos comentários de Wittgenstein sobre Gödel mais coerente com o restante de sua filosofia madura, possibilitaria tratar com clareza a questão da relação da evolução das ideias de Wittgenstein sobre a matemática e sobre a linguagem.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA



WITTGENSTEIN'S REMARKS
ON GÖDEL'S THEOREM

Postdoctoral Research Project

Supervisor: Prof. Dr. João Vergílio Gallerani Cuter

Candidate: Anderson Luis Nakano

Abstract: The project aims at providing a rigorous and unitary analysis of Wittgenstein's late remarks on Gödel's theorem compatible with the author's mature philosophy. Despite the initial negative reception of these remarks (which helped to create a gulf between the philosopher's observations about language/psychology and his observations about mathematics), recent works has appeared with with the purpose of contextualizing and offering a more positive reading of Wittgenstein's observations on Gödel, showing that the negative assessment of these remarks were the product of an inaccurate reading of the passages and a lack of philosophical background necessary for their proper understanding. In general, these works end up including, in the course of the explanation, texts of the "middle period" of Wittgenstein's philosophy, which of course raises the question of the legitimacy of this textual transposition. Thus, it is necessary a historical research that allows a better understanding of the evolution of Wittgenstein's ideas about mathematics in order to establish points of continuity and rupture with regard with his discussions on the matter. One such investigation, besides allowing a reading of Wittgenstein's remarks on Gödel more coherent with the rest of his mature philosophy, would enable one to treat with clarity the question of the relation of the evolution of Wittgenstein's ideas about mathematics and language.

I. Introdução e Justificativa

1. A recepção inicial das observações de Wittgenstein sobre os teoremas de Gödel

Na detalhada biografia de Wittgenstein, Ray Monk nos conta um episódio em que, tendo a chance de corrigir um curto parágrafo de caráter biográfico, Wittgenstein fez questão de adicionar, ao fim deste, uma única frase: “A principal contribuição de Wittgenstein tem sido na filosofia da matemática”¹. Apesar da importância que o próprio Wittgenstein dava a suas reflexões sobre a matemática, condensadas, em sua forma madura, na obra póstuma *Observações sobre os Fundamentos da Matemática* (cuja primeira versão apareceu em 1956), houve, de início, uma recepção negativa de seu trabalho na área, o que ajudou a estabelecer uma assimetria entre as suas observações na área da linguagem e da psicologia – que logo se estabeleceram como filosofia relevante e extremamente influente – e seus comentários filosóficos sobre a matemática, avaliados inicialmente como sendo de qualidade inferior e que pouco contribuíam para o esclarecimento e aprofundamento dos tópicos discutidos (assumia-se, por conseguinte, que as observações sobre a linguagem/psicologia e as observações sobre a matemática eram independentes, e que os “deslizes” cometidos neste domínio não conspurcavam suas reflexões nos outros domínios).

Uma diversidade de fatores contribuem para explicar a recepção negativa das reflexões tardias de Wittgenstein sobre a matemática. O mais importante deles, talvez, é a forma pela qual estas reflexões vieram e ser publicadas: o título que saiu em 1956 é uma coletânea de observações selecionadas pelos editores (G. E. M. Anscombe, R. Rhees e G. H. von Wright), retiradas de diversos manuscritos dos anos de 1937 a 1944. O resultado deste trabalho editorial é uma obra de difícil compreensão e leitura, muitas vezes sem uma sequência natural entre os parágrafos. Como afirma Marion,

[Wittgenstein] era, sem sombra de dúvidas, um autor difícil, mas quando parágrafos inteiros são cortados entre duas passagens publicadas sem nenhuma indicação a este respeito, é bastante compreensível que o leitor se sinta confuso com saltos aparentemente bizarros em seu pensamento².

Não tardaram, então, a aparecer resenhas críticas de autores importantes, como Georg

1 Cf. Monk, R. (1990). *Wittgenstein: The Duty of Genius*. Penguin Books, New York, p. 466.

2 Marion, M. (1998). *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, pp. vii-viii. (tradução nossa)

Kreisel e Michael Dummett. Este último, ao comentar as *Observações sobre os Fundamentos da Matemática*, afirma:

Muitos dos pensamentos são expressos de um modo que o autor reconhece como impreciso ou obscuro; algumas passagens contradizem outras; algumas são bastante inconclusivas; algumas levantam objeções a ideias que Wittgenstein defendeu ou tem defendido, e que não são elas próprias claramente descritas no volume; outras passagens ainda, particularmente aquelas sobre consistência e sobre o teorema de Gödel, são de baixa qualidade ou contém erros definitivos.³

As observações sobre o tema da inconsistência de sistemas axiomáticos e sobre os resultados de Gödel eram paradas obrigatórias nas avaliações negativas que a obra de Wittgenstein recebera durante seus primeiros anos de existência, em particular as observações contidas no apêndice III à Parte I. É importante observar que, ainda que estas observações estejam contidas apenas em um apêndice a uma parte da obra, a temática é de alto grau de importância e não poderia ser, sem prejuízo, simplesmente ignorada. Afinal, o teorema de Gödel é indisputavelmente um dos resultados mais importantes do século XX no campo da lógica e da matemática; Newman elege o teorema de Gödel como “a sequência de raciocínio mais brilhante, difícil e impressionante da lógica moderna”⁴. Além disso, ao contrário da prova, digamos, do teorema de Fermat (que indubitavelmente também poderia ser considerada brilhante, difícil e impressionante), o teorema de Gödel e as discussões que dele se seguem envolvem nada menos que os conceitos de “prova”, “verdade” e “decidibilidade”, conceitos lógico-filosóficos *par excellence*. E os resultados de Gödel são tão impressionantes a ponto de serem até mesmo capazes de fornecer argumentos para certa concepção da matemática extremamente impopular – ao menos entre os filósofos –: o platonismo/realismo. O próprio Gödel é bastante conhecido por sua concepção realista da matemática, tanto quando o é pelos seus teoremas⁵. Como é bem sabido, Gödel argumentou a favor da existência de certa *intuição* ou *percepção matemática*, que seria tão confiável quanto a intuição sensorial⁶, e que mantém

3 Dummett, M. (1959). “Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics”. *The Philosophical Review* 68 (3), p. 324 (tradução nossa).

4 Newman, J. R. (1956) *The World of Mathematics*, Vol. 3, New York: Simon and Schuster, p. 1616.

5 Cf. Martin, D. A. (2005) “Gödel’s Conceptual Realism”. *The Bulletin of Symbolic Logic* 11 (2), p. 207.

6 De acordo com a célebre citação de Gödel: “(...) despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact

evidentemente forte vínculo com seu realismo. E o teorema da incompletude desempenha um papel importante na argumentação de Gödel a favor da analogia entre percepção sensorial e percepção matemática, já que depõe a favor de uma característica do conhecimento matemático que é similar ao conhecimento por meio da percepção sensorial, e que se poderia exprimir pela ideia de “inexauribilidade”⁷: do mesmo modo que a percepção sensorial jamais exaure a totalidade do que se pode conhecer pelos sentidos, um sistema formal também nunca esgota a totalidade do que se pode saber acerca de um domínio matemático⁸.

O realismo de Gödel, como era de se esperar, provocou alvoroço entre diversos filósofos, dentre eles Bertrand Russell que, em sua autobiografia, assevera que “Gödel acabou por se tornar um autêntico platonista, e aparentemente acredita que um 'não' eterno está posto no céu, onde lógicos virtuosos têm a esperança de algum dia encontrá-lo”⁹. Em uma carta a Gödel, Kenneth Blackwell chamara a atenção para esta passagem, para a qual Gödel rascunhou a seguinte resposta:

Com relação ao meu 'autêntico' Platonismo, ele não é mais 'autêntico' que o do próprio Russell em 1921 quando este diz, no livro *Introduction to Mathematical Philosophy*: “A lógica diz respeito ao mundo real tão verdadeiramente quanto a zoologia, embora aos seus aspectos mais gerais e abstratos”. Naquele momento, evidentemente, Russell não encontrou o “não” neste mundo mesmo, mas depois, sob a influência de Wittgenstein, escolheu ignorá-lo¹⁰.

Sem dúvida, Wittgenstein procurou, desde seus primeiros escritos, se afastar de uma

that the axioms force themselves on us as being true. I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e., in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them, and, moreover, to believe that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future”, Gödel, K. (1964). What is Cantor's continuum problem? Em: Benacerraf, P. e Putnam, H. (eds). *Philosophy of mathematics: Selected readings*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. 1964, pp. 483-4.

- 7 Sobre este ponto, Cf. Parsons, C. (1995). “Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought”. *The Bulletin of Symbolic Logic* 1 (1), pp. 63-4.
- 8 O exemplo recorrente de Gödel de um domínio matemático cujas descobertas são “guiadas” pela percepção matemática é a teoria dos conjuntos.
- 9 Russell, B. (1968). *The Autobiography of Bertrand Russell, 1914-1944*. London : Allen & Unwin, p. 356. O fato de Russell utilizar, em seu exemplo, um “objeto lógico” (o “não”) ao invés de um “objeto matemático” não é problemático, já que Gödel não traça nenhuma separação forte entre lógica e matemática.
- 10 Gödel *apud* Wang, H. (1987). *Reflections on Kurt Gödel*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, p. 112. (tradução nossa)

tal concepção realista da lógica e da matemática. No *Tractatus*, Wittgenstein é incisivo ao afirmar que:

Teorias que permitem a uma proposição da lógica aparentar que tem conteúdo são sempre falsas. Poder-se-ia, p. ex., crer que as palavras “verdadeiro” e “falso” designassem duas propriedades entre outras, e apareceria então como um fato notável que toda proposição possuísse uma dessas propriedades. Isso passa a parecer bem pouco evidente, tão pouco evidente quanto soaria, digamos, a proposição “todas as rosas são amarelas ou vermelhas”, ainda que fosse verdadeira. Com efeito, aquela proposição ganha assim todo o caráter de uma proposição da ciência natural, e esse é um indício seguro de ter sido mal entendida¹¹.

Com toda certeza, essa desaprovação do realismo em relação à lógica e à matemática perpassa toda a obra de Wittgenstein. Por outro lado, ao menos o “segundo Wittgenstein” adota uma posição fortemente antirrevisionista a respeito da matemática, e que pode ser resumida na célebre frase: “[a filosofia] também deixa a matemática como está, e nenhuma descoberta matemática pode fazê-la progredir. Um 'problema central em lógica matemática' é para nós um problema da matemática como qualquer outro”¹². A interpretação usual do teorema de Gödel, porém, parece colocar em xeque a consistência destas duas posições consideradas em conjunto: se há, para cada sistema matemático formalizado, verdades expressáveis no sistema que não podem ser demonstradas no interior do sistema, a verdade na matemática não pode ser reduzida à demonstrabilidade: estaríamos próximos de uma posição realista; por outro lado, se o teorema de Gödel – ou ao menos sua interpretação usual – deve ser revista, estaríamos próximos de uma posição revisionista. É claro que se poderia argumentar que Wittgenstein ataca a interpretação do teorema de Gödel sem atacar o cálculo (a “matemática”) que está por trás desta interpretação. Alguns autores alegam, porém, que mesmo a interpretação semântica do teorema de Gödel pode receber um tratamento formalizado dentro de um cálculo matemático, o que faria com que o ataque à interpretação do teorema fosse também o ataque a um cálculo¹³.

11 Wittgenstein, L. (2004). *Tractatus logico-philosophicus*. Tradução e texto introdutório de Luis Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Edusp, aforismo 6.111.

12 Wittgenstein, L. (1958) *Philosophical Investigations*, trad. por. G. E. M. Anscombe, P. M. S. Hacker e Joachim Schulte, Quarta edição (2009), Oxford: Wiley-Blackwell, p. 55 (§124).

13 Cf., p. ex., Steiner, M. (2001). “Wittgenstein as his Own Worst Enemy: The Case of Gödel's Theorem”. *Philosophia Mathematica* 9 (3), p. 264.

É compreensível, assim, que diversos comentadores tenham considerados os comentários de Wittgenstein “anti-wittgensteinianos”¹⁴. Contudo, anterior a esta questão, por assim dizer, de “coerência”, há a questão de saber se Wittgenstein ao menos compreendeu¹⁵ o teorema de Gödel, pois antes de procurar razões para duvidar da coerência da posição do autor, é fundamental saber, de início, se é possível conciliar seus comentários com o que o teorema de Gödel efetivamente prova. Gödel, por exemplo, alega, em uma carta a Menger, que Wittgenstein não compreendera seu teorema:

No que concerne meu teorema sobre proposições indecidíveis, é na verdade claro pelas passagens que você cita que Wittgenstein *não* o compreendeu (ou fingiu não o ter compreendido). Ele o interpreta como um tipo de paradoxo lógico, quando de fato é precisamente o oposto, a saber, um teorema matemático dentro de uma parte da matemática absolutamente incontroversa (teoria dos números finitária ou combinatória). A propósito, toda a passagem que você cita parece-me um contrassenso. Veja, *e.g.*, o ‘medo supersticioso dos matemáticos de contradições’¹⁶.

Outros comentadores também eram da mesma opinião: Bernays diz, por exemplo, que Wittgenstein ignora a premissa do argumento (referente à consistência do sistema axiomático em questão), não compreendendo, assim, o caráter hipotético da conclusão de Gödel¹⁷; Anderson afirma que Wittgenstein confunde sintaxe e semântica (alegação comum, a propósito, de lógicos contemporâneos)¹⁸; mesmo Goodstein, aluno e adepto de diversas ideias de Wittgenstein sobre a matemática (em particular, de sua concepção equacional do cálculo matemático¹⁹), assevera que o conteúdo do apêndice III “não é importante e não joga luz na obra de Gödel”²⁰; Hintikka, por fim, sugere que o resultado de Gödel sobre a incompletude de

14 Cf., p. ex., Anderson, A. R. (1958). “Mathematics and the ‘Language Game’ ”. *The Review of Metaphysics* 11 (3), p. 453.

15 Kreisel alega que o próprio Wittgenstein afirmara, em uma conversa particular, que nunca tinha lido o trabalho de Gödel, tendo sido desencorajado pela introdução. Kreisel, G. (1998) “Second Thoughts around some of Gödel’s Writings: a non-academic Opinion”. *Synthese* 114, p. 119. Mesmo se esse relato for verídico, isso não implica, contudo, que Wittgenstein não possa ter compreendido o teorema a partir de conversas com Turing, Watson ou com o próprio Kreisel.

16 Gödel *apud* Wang, H. (1987). *op. cit.*, p. 49. (tradução nossa)

17 Cf. Bernays, P. (1959). “Betrachtungen zu Ludwig Wittgensteins ‘Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematic’”. *Ratio* II (1).

18 Cf. Anderson, *op. cit.*, p. 452.

19 Sobre este ponto, Cf. Marion, M. “Jogando o bebê junto com a água do banho: Wittgenstein, Goodstein e o cálculo equacional”. *Dois Pontos* 6 (1), 2009, 195–246.

20 Goodstein, R. L. (1957). “Critical Notice of Remarks on the Foundations of Mathematics”. *Mind* 66

sistemas formais é inaceitável para Wittgenstein, e que o filósofo austríaco dedicou considerável esforço na tentativa de mostrar que o resultado é falso. Na medida, porém, que estes esforços se concentraram nos métodos efetivos de prova que Gödel utilizou, “eles são fúteis, e condenados a assim permanecer”²¹.

2. A recepção recente e o debate atual

Nas três últimas décadas, excelentes trabalhos²² surgiram com o propósito de elucidar e defender as ideias de Wittgenstein sobre a matemática, mostrando que a recepção negativa dos escritos de Wittgenstein nesta área eram frutos de uma leitura equivocada das passagens e da falta de contextualização filosófica de suas observações. Estes trabalhos foram acompanhados de leituras mais positivas das observações de Wittgenstein sobre Gödel. O artigo de Stuart Shanker, intitulado *Wittgenstein's Remarks on the Significance of Gödel's Theorem* (1988), foi talvez o primeiro nesse sentido. Já no prefácio de seu livro *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, publicado um ano antes do artigo mencionado, Shanker alegara que um correto entendimento das observações de Wittgenstein sobre Gödel requer um entendimento prévio dos ataques de Wittgenstein, feitos desde o início dos anos 30, ao programa de Hilbert e de sua concepção de metamatemática²³. Seu artigo procura, então, mostrar que uma leitura atenta de obras como as *Observações Filosóficas* e a *Gramática Filosófica* é fundamental para entender os escritos posteriores, pois estes livros contêm reflexões e desenvolvimentos importantes aos quais os escritos posteriores fazem apenas alusão. O artigo de Shanker, porém, não tematiza a questão da legitimidade da apropriação de comentários do período intermediário para explicar a obra madura de Wittgenstein, o que certamente constitui um ponto negativo do artigo (que tem, todavia, o mérito de ser o primeiro trabalho a oferecer uma leitura na qual os comentários de Wittgenstein não aparecem apenas como consequências de incompreensões lógicas e erros pueris).

Desde então, houve uma profusão de trabalhos que alimentaram um intenso debate sobre a interpretação e a correção/incorreção dos comentários de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel. Tais trabalhos vão desde a tentativa de aproximar estes comentários de

(264), p. 553.

21 Hintikka, J. (1996). *Ludwig Wittgenstein. Half-Truths and One-and-a-Half-Truths* (Selected Papers 1). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 149.

22 E.g., Marion, M. (1998). *op. cit.*; Shanker, S. G. (1987). *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*. New York, State University of New York Press.

23 Shanker (1987), *op. cit.*, p. vii.

outras observações de Wittgenstein sobre provas de impossibilidade na matemática²⁴ (que podem ser encontradas desde os primeiros escritos do período intermediário do autor) até tentativas de estabelecer paralelos com a lógica paraconsistente²⁵. Um dos ramos deste debate se concentra no parágrafo 8 (chamado pelos comentadores de “parágrafo notório”) do apêndice III à Parte I das *Observações sobre os Fundamentos da Matemática*. Este “parágrafo notório” ora é visto como um parágrafo de “grande interesse filosófico”, capaz de jogar luz no significado da prova de Gödel²⁶, ora é visto como prova conclusiva que Wittgenstein não entendera por completo os resultados de Gödel²⁷. Não parece haver, portanto, consenso por parte dos intérpretes nem mesmo sobre um único parágrafo de Wittgenstein sobre Gödel, quanto mais sobre a totalidade destes escritos.

3. O problema da evolução do pensamento de Wittgenstein

Uma das tendências da literatura secundária sobre a obra de Wittgenstein (em particular, no Brasil, com a existência de um projeto temático financiado pela Fapesp – proc. 12/50005-6) é o estudo de obras do “período intermediário” do filósofo austríaco, o que inclui obras como as *Observações Filosóficas* e o *Big Typescript*, notas de aulas e manuscritos do início dos anos 30. O objetivo destes estudos é fornecer uma descrição minuciosa da evolução da filosofia de Wittgenstein, em vistas a uma melhor compreensão retrospectiva do *Tractatus Logico-Philosophicus* bem como de sua filosofia tardia. Na nossa tese de doutoramento (financiada pela Fapesp – proc. 2011/22640-6), procuramos explorar os “capítulos matemáticos” das *Observações Filosóficas*, obra que contém escritos dos anos 1929/30, e que marca os primeiros distanciamentos do autor em relação a seu primeiro livro. Pudemos constatar que as discussões de Wittgenstein, nesta obra, sobre a matemática oferecem uma caracterização precisa da posição de Wittgenstein, nesta época, acerca da *Grundlagenkrise* e frente as três escolas clássicas de fundamentação da matemática: o logicismo, o intuicionismo

24 Cf. Floyd, J. (1995). “On Saying What You Really Want to Say: Wittgenstein, Gödel and the Trisection of the Angle”. Em: J. Hintikka (Ed.), *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, pp. 373–425. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

25 Cf. o capítulo 12 do livro Berto, F. (2009). *There's Something About Gödel: The Complete Guide to The Incompleteness Theorem*. Oxford: Wiley–Blackwell.

26 Cf. Floyd, J. (2001). “Prose versus Proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski and Truth”. *Philosophia Mathematica* 9 (3), 280–307. Cf. tb. Floyd, J. and H. Putnam (2000). “A Note on Wittgenstein’s “Notorious Paragraph” about the Gödel Theorem”. *The Journal of Philosophy* 97 (11), 624–632.

27 Cf. Steiner, M. (2001). “Wittgenstein as his Own Worst Enemy: The Case of Gödel’s Theorem”. *Philosophia Mathematica* 9 (3), 257–279. Cf. tb. Rodych, V. (1999). “Wittgenstein’s Inversion of Gödel’s Theorem”. *Erkenntnis* 51, 173–206.

e o formalismo²⁸ (o que indica a fecundidade dos resultados da pesquisa, ao mostrar que foram considerados os aspectos centrais envolvidos nas discussões da época, e não aspectos marginais que não penetram naquilo que há de essencial neste rico debate). A tese, porém, não faz uma reflexão sobre a posição de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel, o qual, segundo a visão tradicionalmente aceita, encerra o certame ao colocar um fim nas pretensões do formalismo de Hilbert. A exclusão destas reflexões do escopo da tese se deve a motivos cronológicos, já que o teorema de Gödel é originalmente publicado em 1931, um ano após a confecção das *Observações Filosóficas*. Entretanto, na medida em que a tese investiga a posição de Wittgenstein frente ao formalismo (incluindo temas como “metamatemática” e “provas de consistência”), a tese toca o solo onde se erigem os resultados de Gödel, sendo plenamente possível, em princípio, oferecer uma crítica da interpretação usual do teorema de Gödel (a saber, a de que o teorema prova a existência de verdades aritméticas indemonstráveis, levando, assim, à conclusão de que os predicados “ser verdadeiro” e “ser demonstrável” não são extensionalmente equivalentes) a partir dos escritos já do início do período intermediário do pensamento de Wittgenstein.

E, com efeito, muitos dos autores que discutem os comentários das *Observações sobre os Fundamentos da Matemática* sobre o teorema de Gödel acabam incluindo, em sua explicação destes comentários, textos do período intermediário, o que levanta evidentemente a questão da legitimidade desta transposição textual. Shanker, por exemplo, utiliza inúmeros textos do período intermediário no curso de sua argumentação²⁹, e sua interpretação das observações de Wittgenstein sobre Gödel se apoia fundamentalmente sobre a concepção de matemática que Wittgenstein tinha no período intermediário (tal como Shanker a entende), a saber, a de um conjunto de sistemas autônomos e completos, sem lacunas, sendo o sentido de uma proposição matemática completamente determinado pelas regras do sistema em que ela está essencialmente inserida. É bastante duvidoso, todavia, que Wittgenstein tenha mantido essa concepção em seu período tardio, em que as noções de “regra” e de “cálculo” se encontram fundamentalmente vinculadas a práticas concretas e formas de vida.

Também no artigo *Wittgenstein's Inversion of Gödel's Theorem*, Rodych argumenta que diversos dos pontos que Wittgenstein quer estabelecer nos seus comentários tardios sobre Gödel “utilizam implicitamente posições que são articuladas de modo mais explícito no

28 A tese, a ser defendida do terceiro trimestre de 2015, é apresentada em Anexo a este documento em seu estado atual.

29 Cf., em particular, os capítulos de 4 a 6 do artigo *Wittgenstein's Remarks on the Significance of Gödel's Theorem*.

período intermediário (e.g., a posição finitista de Wittgenstein no que concerne à quantificação...)”³⁰. Mais uma vez, é pertinente a questão de saber se estas “posições” de Wittgenstein em seu período intermediário se mantiveram em seu período maduro, afinal, diversas das concepções do período intermediário parecem ser explicitamente questionadas em textos do período tardio. A título de exemplo, considere o parágrafo 463 das *Investigações Filosóficas*, em que Wittgenstein tematiza o clássico exemplo da (impossibilidade da) trisseção de um ângulo:

“Você estava procurando por *ele*? Você nem podia saber se ele está lá!” – Este problema, porém, surge *realmente* quando se busca algo na matemática. Pode-se, por exemplo, colocar a questão: como foi possível até mesmo *procurar* pela trisseção do ângulo?³¹

Parece claro, para um conhecedor dos textos do período intermediário, que o interlocutor de Wittgenstein neste parágrafo poderia muito bem ser o próprio Wittgenstein do início dos anos 30, que alegava que não faz sentido “buscar” pela “solução” do problema da trisseção de um ângulo, e que portanto esse não era um problema matemático no sentido estrito do termo “problema”. A resposta do Wittgenstein maduro a seu interlocutor parece consistir simplesmente em dizer que nós *realmente procuramos* por algo que não existe e nem pode existir, e que o equívoco recai não sobre nosso uso linguístico do termo “busca”, mas sobre a tese filosófica acerca da intencionalidade do ato de busca³².

Por fim, Jourdan, no artigo *As observações de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel*, recupera as observações de Wittgenstein nas *Observações Filosóficas* e nas *Conversas com o Círculo de Viena* contra as noções de “metamatemática” e de “provas de provabilidade”, para reiterar, em seguida, que “apenas sob esse ponto de vista, entendendo suas razões, podemos compreender a recusa a aceitar que uma mesma proposição possa ser indemonstrável em um sistema e demonstrável em outro”³³. Para isto, a autora argumenta a favor de pontos de continuidade entre as obras do período intermediário e do período maduro que possam

30 Rodych (1999), *op. cit.*, p. 173.

31 Wittgenstein, L. (1958) *Philosophical Investigations*, *op. cit.*, p. 141 (§463).

32 Cf. Floyd (1995), *op. cit.*, p. 385: “This is a *reductio* of a misguided conception of the object of an intention or search: the trisection example shows that it makes sense to (systematically) “search for” something which not only does not exist, but *could* not exist”.

33 Jourdan, C. (2014) As observações de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel, *Philosophos* 18 (2), p. 94.

justificar o uso de elementos do período intermediário para elucidar a posição tardia de Wittgenstein. Segundo Jourdan, Wittgenstein sempre manteve a “tese da provabilidade”, segundo a qual, no âmbito normativo (como a matemática), a “demonstrabilidade encontra-se equacionada à verdade”³⁴. Outros autores, porém, apontam para o fato de que, em seus últimos anos, “Wittgenstein parece ter evitado todas as teorias filosóficas. Portanto, atribuir qualquer teoria filosófica a Wittgenstein, incluindo uma teoria filosófica sobre a matemática, parece logo de início problemático. A tese da provabilidade é definitivamente uma tese filosófica”³⁵. Há, deste modo, o problema de saber em que medida o método filosófico de Wittgenstein, em seu período tardio, evita o revisionismo na matemática, bem como há o problema de saber como esta questão era – e se era – tratada nas obras do período intermediário.

II. Objetivos e Resultados Esperados

Diante deste contexto, os objetivos do presente trabalho são:

1. fornecer uma leitura minuciosa e unitária dos comentários tardios de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel compatível com a filosofia madura do autor;
2. redigir um comentário filosófico sobre como o Wittgenstein do período intermediário reagiria aos resultados estabelecidos por Gödel;
3. estabelecer pontos de continuidade e de ruptura entre as concepções de matemática do período intermediário e do período tardio, a fim de tratar o problema da legitimidade da transposição de textos do período intermediário para o período tardio.

A análise dos comentários de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel forneceria, então, para além da possibilidade de elucidar o conteúdo destes comentários bastante intrigantes e pouco transparentes, a ocasião de investigar o método de Wittgenstein ao trabalhar estes temas, além de permitir uma melhor compreensão da evolução de seu modo de pensar no período que vai dos primeiros escritos pós-*Tractatus* até os escritos do período tardio de seu pensamento. Uma tal análise proporcionaria meios para avaliar em que medida três teses

34 Ibid., p. 65.

35 Sayward, C. (2001). On Some Much Maligned Remarks of Wittgenstein on Gödel. *Philosophical Investigations* 24 (3), p. 267.

sobre a obra de Wittgenstein, bastante difundidas na literatura secundária – e irreconciliáveis se tomadas em conjunto –, são válidas, a saber:

- i. A de que as reflexões de Wittgenstein levam a teorias sobre a linguagem fundamentalmente distintas nos três períodos: no *Tractatus*, nas obras do período intermediário e nas *Investigações Filosóficas*;
- ii. A de que as diferenças entre as posições de Wittgenstein sobre a matemática em seus diversos períodos ou, ao menos, do período intermediário em diante, não são tão importantes se contrastadas com as diferenças em relação à filosofia da linguagem;
- iii. A de que as reflexões de Wittgenstein sobre a matemática *orientam* as suas reflexões sobre a linguagem, sendo ambas componentes inseparáveis de uma mesma orientação filosófica.

III. Plano de trabalho e cronograma

Conforme o período de 2 (dois) anos estabelecido pela Fapesp, o desenvolvimento da pesquisa foi dividido em quatro etapas:

PRIMEIRO SEMESTRE

O teorema de Gödel e seus desdobramentos – Análise rigorosa da matemática envolvida no artigo original de Gödel e de seu pano de fundo (formalismo e finitismo de Hilbert, metamatemática, etc.); consistência e ω -consistência; modelos não-*standard* da aritmética; o teorema de Rosser; a separação entre sintaxe e semântica; a definição de verdade de Tarski aplicada ao caso do teorema de Gödel; as relações entre os resultados de Gödel e seu realismo/platonismo.

SEGUNDO SEMESTRE

Wittgenstein intermediário e os pressupostos do teorema de Gödel – Análise crítica das observações de Wittgenstein contra a ideia de “metamatemática”; papel sintático dos axiomas; provas de relevância e provabilidade; a ausência de lacunas dos sistemas matemáticos; as discussões com o Círculo de Viena (em particular, com Waismann) sobre a noção de “consistência”; verdade e demonstrabilidade; prova, demonstração e análise; a comparação da proposição matemática como a superfície de um sólido; as provas de impossibilidade e as

conjecturas na matemática; como o Wittgenstein do período intermediário reagiria aos resultados estabelecidos por Gödel.

TERCEIRO SEMESTRE

Wittgenstein tardio e os comentários do teorema de Gödel – Análise estrutural dos comentários das *Observações sobre os Fundamentos da Matemática*; análise genética destes comentários a partir dos manuscritos do autor; leitura crítica da literatura secundária; a interpretação de Shanker, a interpretação de Floyd; a interpretação de Floyd-Putnam e as críticas de Bays e Steiner; a interpretação de Rodych e Steiner; os desdobramentos da discussão sobre o “parágrafo notório”, a interpretação de Berto, a interpretação de Jourdan; retorno aos textos de Wittgenstein sob a luz desta discussão.

QUARTO SEMESTRE

A evolução do pensamento de Wittgenstein sobre a matemática: continuidades e rupturas – Comparação das discussões anteriores, com o intuito de jogar uma luz nas diferenças tanto no método filosófico utilizado quanto na posição frente as discussões sobre a fundamentação da matemática; a distinção entre prosa e cálculo no período intermediário e no período tardio; o problema da legitimidade da transposição de textos do período intermediário para o período tardio; revisionismo no período intermediário e no período tardio.

IV. Materiais e métodos

O material de trabalho primário é constituído pelas obras e manuscritos de Wittgenstein, bem como pelos artigos originais em que Gödel publicou seus resultados. O material de apoio é composto pelos trabalhos de intérpretes e comentadores, tanto no que concerne às observações de Wittgenstein sobre Gödel em particular, quanto em relação a sua filosofia da matemática em geral. O projeto possui uma orientação histórica, na medida em que prevê uma análise das mudanças de concepção de Wittgenstein da matemática, com o intuito de oferecer uma leitura de seus comentários sobre Gödel compatível com sua filosofia madura, bem como o de contrastar esta leitura com a posição do autor em escritos anteriores, não propriamente sobre o teorema de Gödel, mas sobre conceitos que balizam os resultados de Gödel como, p. ex., as noções de “metamatemática”, “matemática finitária” e “provas de

consistência”. Essa abordagem propiciará o acesso a um ponto de vista privilegiado acerca de sua obra madura, permitindo estabelecer pontos de continuidade e ruptura no desenvolvimento de seu pensamento. Uma parte essencial da pesquisa consiste na análise das leituras disponíveis na literatura secundária sobre o assunto, as quais erigiram e continuam erigindo um intenso debate. É importante ressaltar, outrossim, que a supervisão do Prof. João Vergílio Gallerani Cuter será de extrema importância para o sucesso do projeto, não apenas devido a seu vasto conhecimento da obra de Wittgenstein, mas também porque o tópico da filosofia da matemática e da lógica é um de seus temas principais de pesquisa, tendo publicado diversos artigos importantes sobre a lógica e a matemática que têm, como pano de fundo, os escritos do filósofo austríaco. Destacamos ainda o fato de que Cuter é um dos idealizadores e coordenadores do projeto temático Fapesp (proc. 12/50005-6), que visa a investigar a importância das obras do período intermediário para uma maior compreensão do desenvolvimento das reflexões do autor. O projeto temático também previu a organização de três colóquios internacionais “*The Middle Wittgenstein*”, o que propiciou uma rica rede internacional de estudos e intercâmbio de leituras e ideias. Dentre os pesquisadores estrangeiros que participaram ativamente destes colóquios, encontra-se o Prof. Dr. Jean-Philippe Narboux, que orientou nosso estágio de doutoramento no exterior (com bolsa BEPE-Fapesp – proc. 2013/17164-6) e que forneceu importantes chaves de leitura para o pensamento de Wittgenstein, o que já era de se esperar, dado o comprovado conhecimento de Narboux da obra de Wittgenstein e das discussões atuais sobre ela.

V. Disseminação e avaliação

Pretende-se divulgar os resultados em colóquios e simpósios sobre o assunto e em artigos para revistas especializadas. Almejamos, ainda, a publicação de um livro que permita articular todos os resultados da pesquisa realizada durante o período de concessão da bolsa. A avaliação dos resultados da pesquisa poderá ser feita a partir dos seguintes questionamentos:

1. A interpretação proposta para os comentários de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel é coerente e compatível com a orientação filosófica de Wittgenstein em seu período maduro?
2. A nossa leitura dá conta da evolução do pensamento do autor em relação à matemática e de seu estatuto no interior destas reflexões?

3. Em que medida o comentário filosófico das observações de Wittgenstein em seu período intermediário ilumina o seu período maduro e em que medida ele legitima ou torna problemática a transposição de textos do período intermediário para o período maduro?

Bibliografia

- Anderson, A. R. (1958). "Mathematics and the 'Language Game' ". *The Review of Metaphysics* 11 (3), 446–458.
- Bernays, P. (1959). "Betrachtungen zu Ludwig Wittgensteins 'Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematic'". *Ratio* II (1), 1-22.
- Berto, F. (2009). *There's Something About Gödel: The Complete Guide to The Incompleteness Theorem*. Oxford: Wiley–Blackwell.
- Dummett, M. (1959). "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics". *The Philosophical Review* 68 (3), 324–328.
- Floyd, J. (1995). "On Saying What You Really Want to Say: Wittgenstein, Gödel and the Trisection of the Angle". Em: J. Hintikka (Ed.), *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, pp. 373–425. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.
- _____ (2001). "Prose versus Proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski and Truth". *Philosophia Mathematica* 9 (3), 280–307.
- Floyd, J. and H. Putnam (2000). "A Note on Wittgenstein's "Notorious Paragraph" about the Gödel Theorem". *The Journal of Philosophy* 97 (11), 624–632.
- Gödel, K. (1931). "Über Formal Unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und Verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38, 173–198.
- _____ (1964). What is Cantor's continuum problem? Em: Benacerraf, P. e Putnam, H. (eds). *Philosophy of mathematics: Selected readings*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. 1964, pp. 470–485
- Goodstein, R. L. (1957). "Critical Notice of Remarks on the Foundations of Mathematics". *Mind* 66 (264), 549–553.
- Hintikka, J. (1996). *Ludwig Wittgenstein. Half-Truths and One-and-a-Half-Truths* (Selected Papers 1). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Jourdan, C. (2014) As observações de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel, *Philosophos* 18

- (2), 61–104.
- Kreisel, G. (1958). “Wittgenstein’s Remarks on the Foundations of Mathematics”. *The British Journal for the Philosophy of Science* 9 (34), 135–158.
- _____ (1998) “Second Thoughts around some of Gödel’s Writings: a non-academic Opinion”. *Synthese* 114, 99–160.
- Marion, M. (1998). *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.
- _____ (2009) “Jogando o bebê junto com a água do banho: Wittgenstein, Goodstein e o cálculo equacional”. *Dois Pontos* 6 (1), 195–246.
- Martin, D. A. (2005) “Gödel’s Conceptual Realism”. *The Bulletin of Symbolic Logic* 11 (2), 207–224.
- Monk, R. (1990) *Wittgenstein: The Duty of Genius*. Penguin Books, New York.
- Newman, J. R. (1956) *The World of Mathematics*, Vol. 3, New York: Simon and Schuster.
- Parsons, C. (1995). “Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel’s Thought”. *The Bulletin of Symbolic Logic* 1 (1), pp. 44–74.
- Rodych, V. (1999). “Wittgenstein’s Inversion of Gödel’s Theorem”. *Erkenntnis* 51, 173–206.
- Russell, B. (1968). *The Autobiography of Bertrand Russell, 1914-1944*. London : Allen & Unwin.
- Shanker, S. G. (1987). *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*. New York: State University of New York Press.
- _____ (1988). “Wittgenstein’s Remarks on the Significance of Gödel’s Theorem”. Em: S. G. Shanker (Ed.), *Gödel’s Theorem in Focus*. London: Croom Helm.
- Sayward, C. (2001). On Some Much Maligned Remarks of Wittgenstein on Gödel. *Philosophical Investigations* 24 (3), 262–270.
- Steiner, M. (2001). “Wittgenstein as his Own Worst Enemy: The Case of Gödel’s Theorem”. *Philosophia Mathematica* 9 (3), 257–279.
- Wang, H. (1987). *Reflections on Kurt Gödel*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- Wittgenstein, L. (1958) *Philosophical Investigations*, trad. por. G. E. M. Anscombe, P. M. S. Hacker e Joachim Schulte, Quarta edição (2009), Oxford: Wiley-Blackwell.
- _____ (1984/1989) *Werkausgabe in 8 Bänden*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- _____ (2000) *Wittgenstein’s Nachlaß*. The Bergen Electronic Edition. 5 Faksimile-CD-ROM. Bergen/Oxford: Universitetet i Bergen/Oxford University Press,.



_____ (2004). *Tractatus logico-philosophicus*. Tradução e texto introdutório de Luis Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Edusp.