UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

MARCO ANTONIO CHABBOUH JUNIOR

SOBRE AS CONDIÇÕES HISTÓRICAS, FILOSÓFICAS E MATEMÁTICAS DAS NOÇÕES FREGEANAS DE PROPOSIÇÕES ANALÍTICAS E DE PROPOSIÇÕES *A* PRIORI NOS *FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA*

Projeto de pesquisa de pós-doutorado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, da Universidade de São Paulo.

Área de Concentração: Lógica, Filosofia da Linguagem e Filosofia das Ciências

Supervisor: Prof. LD. Edelcio Gonçalves de Souza

SÃO PAULO
2023

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

MARCO ANTONIO CHABBOUH JUNIOR

ON THE HISTORICAL, PHILOSOPHICAL AND MATHEMATICAL CONDITIONS OF FREGE'S NOTION OS ANALYTICAL AND *A PRIORI* PROPOSITIONS IN *THE FOUNDATIONS OF ARITHMETIC*

Post-Doctorate Project presented to the Program of Graduate Study in Philosophy of the University of São Paulo's Faculty of Philosophy, Languages and Literature, and Human Sciences

Research Area: Logic, Philosophy of Language and Philosophy of Science

Supervisor: Prof. LD. Edelcio Gonçalves de Souza

SÃO PAULO
2023

RESUMO: O problema de pesquisa do presente projeto é o da determinação da relação de condição histórico-filosófica entre o desenvolvimento da Teoria de Conjuntos de Georg Cantor e a noção de proposições analíticas e *a priori* nos *Fundamentos da Aritmética* de Gottlob Frege**.** Quer-se saber a exata medida em que o desenvolvimento inicial da Teoria de Conjuntos impactou o modo como Frege desenvolve suas distinções proposicionais. A hipótese inicial da pesquisa é a de que sem as obras de Cantor – ou, pelo menos, sem a antecedência da noção de sucessor de Grassmann – Frege não teria como determinar suas distinções proposicionais. No que se segue, é apresentado, de maneira sintética, o modo como dois outros fatores influenciaram as distinções fregeanas, a saber, o psicologismo lógico-aritmético do século XIX e o desenvolvimento de geometrias não-euclidianas. Para tanto, primeiramente, expõe-se o modo como a distinção foi concebida por Kant na *Crítica da Razão Pura* e algumas de suas limitações. Em seguida, aborda-se a maneira em que o psicologismo se faz presente na obra de Mill. Logo após, apresenta-se o que é uma geometria não-euclidiana. Por fim, expõe-se a crítica de Frege ao psicologismo nos *Fundamentos da Aritmética*, suas noções de proposições analíticas e de proposições *a priori* e demonstra-se o vínculo dessas noções com o psicologismo, com as geometrias do século XIX e com a nascente Teoria de Conjuntos.

ABSTRACT: The research problem of this research project is to determine the historical-philosophical conditions of the relationship between the development of Georg Cantor's Set Theory and the notion of analytical and a *priori* propositions in Gottlob Frege's *Foundations of Arithmetic*. It is aimed to know the exact extent to which the initial development of Set Theory impacted the way Frege develops his propositional distinctions. The initial hypothesis of this investigation is that without the Cantor’s works – or, at least, without the advance of Grassmann's concept of successor – Frege would not have been able to determine his propositional distinctions. In what follows, it is presented, in a nutshell, the way in which two other factors influenced Frege's distinctions, namely, the logical-arithmetic psychologism of the 19th century and the development of non-Euclidean geometries. To do so, firstly, it is presented how the distinction was conceived by Kant in the *Critique of Pure Reason* and some of its limitations. Then, it is shown in which sense it is possible to call Mill’s doctrine a psychologistic one. Soon after, it is introduced what is a non-Euclidean geometry. Finally, Frege's critique of psychologism in the *Foundations of Arithmetic* is presented, the author’s notions of analytical propositions and *a priori* propositions are analysed, and it is argued that there is a link between these notions, the logical-arithmetical psychologism, the non-Euclidian geometries the nascent Set Theory.

INTRODUÇÃO

Em filosofia, ao menos desde a primeira recepção da *Crítica da Razão Pura*, existe um indiscutível esforço global de compreensão das noções de juízos analíticos e de juízos *a priori*. Há, ainda, sobretudo nos universos anglófono, germanófono e lusófono, um admirável cuidado de leitura dos textos de Gottlob Frege – inclusive dos *Fundamentos da Aritmética* – buscando por suas noções de proposições analíticas e de proposições *a priori*.

O que este projeto apresenta é uma tentativa de composição dessas formidáveis produções: quer-se compreender como foi possível que Frege afirmasse adoção ao espírito das distinções kantianas (FREGE, 1974a, 210) e que, ao mesmo tempo, tenha modificado a distinção em pontos tão sensíveis – para não dizer que o filósofo a alterou completamente.

Para isso, neste projeto, mostrar-se-á como (i) o psicologismo lógico-aritmético do século XIX e como (ii) a aurora das geometrias não-euclidianas foram marcos irrevogáveis da história do pensamento do autor que o obrigaram a modificar a distinção. Ao mesmo tempo, ficará claro que há um elemento da história que precisará ainda ser ainda analisado: o papel da Teoria de Conjuntos.

JUSTIFICATIVA

1. A noção kantiana de analiticidade

A distinção entre juízos *a priori* e *a posteriori* e entre juízos analíticos e sintéticos é fundamental para a *Crítica da Razão Pura*. O estabelecimento dessa distinção aparece logo na “Introdução” da obra e é a partir dessa distinção que o filósofo de Königsberg apresenta o problema fundamental de sua filosofia teórica: “como são possíveis os juízos sintéticos *a priori*” (KANT, 2001, A 32 = B 19)? Nesta seção do texto, quer-se estabelecer (i) como Kant elabora a distinção; (ii) o modo como, a partir da distinção, o filósofo classifica os juízos da lógica, da aritmética e da geometria e (iii) como as palavras de Kant exibem certa ambiguidade que levam o leitor de sua primeira *Crítica* a supor que a distinção se ancora em princípios psicológicos. Essa exposição será importante para, nas seções seguintes deste trabalho, mostrar como Frege é obrigado a repensar a noção de analiticidade e sua relação com geometria e aritmética.

1.1 Conhecimentos *a priori* e *a posteriori*

A distinção entre conhecimentos (*Erkentinisse*) *a priori* e *a posteriori* é estabelecida primeiramente em um registro **negativo**. Kant nos diz que os conhecimentos *a posteriori* são aqueles que têm sua origem/fonte (*Quelle*) na experiência e que os juízos *a priori*, diferentemente, são aqueles independentes (*unabhängige*) da experiência (Cf. Ibid, B 2).

Logo após, todavia, na segunda seção da “Introdução”, Kant estabelece dois critérios **positivos** (Cf. PATON, 2001, p. 77) para que se possa distinguir um conhecimento *a priori*. Em primeiro lugar, como a experiência ensina apenas que algo possa ser desta ou daquela maneira, mas nunca que não possa ser diferentemente, um conhecimento pode ser distinguido como *a priori* caso ele seja **necessário** (Cf. KANT, 2001, B 3). Em segundo lugar, dado que a experiência nunca é capaz de apresentar verdades sobre a totalidade dos objetos, mas apenas sobre uma generalidade por indução, um conhecimento genuinamente **universal** é *a priori*.

Consequentemente, conhecimentos *a priori* são, negativamente, independentes da experiência no que diz respeito a sua origem e, positivamente, são conhecimentos universais e necessários/apodíticos com respeito à quantidade e à modalidade, respectivamente. Em contraposição, conhecimentos *a posteriori* são derivados da experiência e, por isso, só possuem generalidade indutiva e são todos contingentes/problemáticos (Cf. Ibid, A 70 = B 95 e A 74-75 = B 99-100).

O filósofo oferece exemplos que podem iluminar a distinção. Entre os juízos *a priori* se encontram “toda mudança tem uma causa” (Ibid., B 3); “em um triângulo a soma de dois lados é maior que a do terceiro” (Ibid, A 25 = B 39); “o espaço tem somente três dimensões” (Ibid, B 41). Entre os juízos *a posteriori* encontra-se “os corpos são pesados” (Ibid, B 41).

1.2 Juízos analíticos e juízos sintéticos

Como no caso da distinção precedente, discernir juízos analíticos de juízos sintéticos envolve não apenas uma dimensão. Por um lado, (i) pode-se chamar um juízo analítico quando o conceito (*Begriff*) que atua como predicado do juízo está **contido no** ou **pertence ao** conceito que atua como sujeito do juízo (Cf. Ibid, A 6-7). Nessa perspectiva, um juízo é chamado sintético quando **não** se respeita essa relação de continência, ou seja, quando o conceito que atua como predicado não está contido no conceito que atua como sujeito.

Por outro lado, (ii) é possível afirmar que um juízo é analítico quando a relação entre predicado e sujeito do juízo é pensada por **identidade** (Cf. Ibid, A 7). Quando essa relação de identidade não estiver presente, pode-se chamar o juízo de sintético.

Por fim, e em última instância, (iii) um juízo pode ser chamado analítico quando ele é **explicativo** ao invés de ser extensivo. Isso quer dizer: um juízo sintético acrescenta informações ao conceito do sujeito; um juízo analítico apenas explicita o conceito.

Os exemplos que Kant oferece de juízos analíticos são muito cuidadosamente coletados pelo autor: “todos os corpos são extensos” (Ibid, B 11), “todos os corpos são impenetráveis” e “todos os corpos possuem certa figura” (Ibid, B 12). Em contrapartida, Kant afirma que o juízo “os corpos são pesados” é um juízo sintético.

1.3 Articulação das duas distinções

Não há grande complexidade em perceber como esses dois pares de noções se articulam para formar quatro pares de tipos de juízos que, pelo modo em que Kant os define, podem ser reduzidos a três tipos de juízos.

Em primeiro lugar, têm-se os juízos sintéticos *a posteriori*. Por serem *a posteriori*, esses juízos têm sua origem na experiência e, por serem sintéticos, os conceitos de seus predicados não estão contidos nos conceitos de seus sujeitos. Assim, quando se assente que “o corpo é pesado” se está em posse de um juízo sintético *a posteriori* que, como tal, expande o conceito do sujeito e o faz por ter seu suporte na experiência.

Em segundo lugar, poder-se-ia pensar na possibilidade de juízos analíticos *a posteriori*, mas essa possibilidade está vetada. Isso porque, de acordo com a definição de Kant, os juízos analíticos não fazem mais do que explicitar o significado do conceito que atua como sujeito do juízo. Se for assim, então os juízos analíticos têm seu fundamento nos significados dos seus conceitos e nas leis da lógica, em especial nos princípios de identidade e de não contradição.

Em terceiro lugar, têm-se os juízos analíticos *a priori*. Todos os juízos analíticos são desse tipo. São *a priori*, pois, baseados unicamente nos significados dos conceitos empregados e nas leis da lógica, sua verdade não se deriva da experiência. Isso pode ser visto, inclusive, por sua necessidade e sua universalidade: quando se diz que “os corpos são extensos”, isso é necessariamente verdadeiro para todo triângulo possível.

Por fim, e de maneira problemática, podem-se considerar os juízos sintéticos *a priori*. Esses juízos acrescentam algo novo ao conceito do sujeito, pois o predicado está pensado completamente fora do conceito do sujeito. Simultaneamente, esses juízos são *a priori*, pois, por não terem sua origem na experiência, suas verdades são pensadas com necessidade e universalidade rigorosas. Neste momento, interessa citar o supramencionado “em um triângulo a soma de dois lados é maior que a do terceiro” (Ibid, A 25 = B 39).

1.4 Juízos sintéticos e analíticos na lógica, na geometria e na aritmética

Como anteriormente apresentado, as distinções efetuadas por Kant não são meras curiosidades lógicas. Ao contrário, é a partir dessas distinções que o filósofo apresenta o problema de sua filosofia teórica. Consequentemente, obviamente, o pensador discerne e reflete sobre as ciências a partir das noções apresentadas. Isso é de todo importante nesta oportunidade, pois, argumentar-se-á mais a frente, não só o fundamento da distinção se altera de Kant para Frege, mas, sobretudo, se altera também o modo como Frege concebe a relação entre as distinções e as ciências.

Para Kant, a lógica encontrou o caminho seguro da ciência já há muito (Cf. Ibid, B VIII). Isso porque, de acordo com o prussiano, na lógica "o entendimento se ocupa de si mesmo e de sua forma... [na lógica] a razão não trata de objetos, mas apenas ocupa-se de si mesma" (Ibid, B IX). Mais a frente no texto da primeira *Crítica*, o filósofo dirá ainda que "A lógica não alarga os conhecimentos" (Ibid, A 61), pois ela "pode chamar-se analítica e é, por isso mesmo, a pedra de toque, pelo menos negativa da verdade" (Ibid, B 84). Isso, então, quer dizer que a lógica procede por análise de conceitos. Os conceitos dos predicados dos juízos lógicos estão contidos nos conceitos dos sujeitos desses juízos. O pensador não afirma diretamente, mas é de se esperar, a partir do que acaba de ser apresentado, que a relação de identidade entre os predicados e os sujeitos dos juízos da lógica diga respeito à forma do entendimento. Isso quer dizer: o entendimento possui regras de operação que são as leis da lógica e o próprio entendimento analisa essas regras e formula as leis lógicas que, por sua vez, já estão historicamente disponíveis em sua totalidade desde Aristóteles. Um resultado direto e importante dessas afirmações é o de que as leis lógicas, sendo analíticas, são absolutamente *a priori* e, consequentemente, produzem genuína universalidade e rigorosa necessidade.

A matemática[1] também muito cedo encontrou o caminho seguro, mas, diferentemente do que ocorre no caso da lógica, não foi tão fácil esse encontro. Segundo Kant, essa dificuldade se deu por conta da óbvia presença de juízos sintéticos em toda a matemática. Assim, a matemática não teve a sorte da lógica de derivar seus princípios e leis analiticamente a partir do entendimento. Alternativamente, a matemática precisou operar sinteticamente com base nas intuições puras e nos esquemas.

Os exemplos clássicos que o autor dá no "item V" da "Introdução" e que se somam aos supramencionados são o dos juízos "5+7=12"[2] e "a menor distância entre dois pontos é uma

[1] Sob a qual o filósofo organiza a aritmética e a geometria (Cf. Ibid, B 14-16).
[2] Não irrelevantemente citado por Frege (1974a, 209).

linha reta" (Ibid, A 716 = B 744). No primeiro juízo, Kant nos diz que não é possível, por simples análise do conceito da soma de "cinco mais sete" se chegar ao resultado "doze". Para ele, ocorre a realização de uma operação que pode e deve ser amparada pelo auxílio de intuições externas como, por exemplo, os dedos da mão ou pontos numa folha. No segundo juízo, o autor diz que tampouco se pode extrair da simples noção de linha reta qualquer dado quantitativo. Também na geometria, o operador **precisa recorrer à intuição pura para a construção da linha e para a determinação do princípio**.

Por fim, menos importantemente aqui, mas mais centralmente para Kant, a física está numa relação muito próxima com a matemática. Ainda que, diferentemente da matemática, a física seja *a priori* e não pura, também os seus juízos e, sobretudo, os princípios sobre os quais se assenta, são *a priori* e sintéticos. Por esse motivo, muito tempo levou até que a física encontrasse o caminho seguro da ciência. Os exemplos oferecidos pelo autor são "em todas as modificações do mundo corpóreo a quantidade da matéria permanece constante" e "em toda a transmissão de movimento, a ação e a reação têm de ser sempre iguais uma à outra" (Ibid, B 17).

1.5 Avaliação das distinções

Alguns detalhes acerca das distinções efetuadas por Kant requerem aqui especial atenção. Em primeiro lugar, é fundamental notar que o campo de discussão kantiano é – como não poderia ser diferente – o da epistemologia moderna e não o da moderna filosofia da linguagem. O prussiano aceita sem ressalvas que os juízos sobre os quais está falando são representações (*Vorstellungen*) (Cf. Ibid, A 197 = B 242 e A 320 = B 376) e, como tais, são itens de consciências aos moldes das ideias cartesianas e lockeanas. Portanto, o registro da distinção não é o das proposições (*Sätze*) e, assim, não é o da linguagem no sentido contemporâneo[3].

A partir disso, sobre a distinção entre *a priori* e *a posteriori*, a primeira coisa que precisa ser resgatada é que ela é feita em duas frentes: a negativa e a positiva. É fundamental perceber que a dimensão negativa versa sobre a **origem** dos conhecimentos e a segunda dimensão sobre a **modalidade** da cópula. Em outras palavras, talvez seja possível afirmar que a dimensão positiva seja estabelecida a partir de recursos lógicos – e, mesmo assim, discutivelmente –, todavia, a dimensão negativa, sem dúvida, não é estabelecida exclusivamente de acordo com princípios lógicos. Ter ou não **origem** na experiência não é e não pode ser estabelecido com base nos princípios fundamentais da lógica clássica e, muito menos, com base na sintaxe própria dos

---

[3] De fato, se se segue aquilo que foi defendido por Kenny, é justamente na filosofia de Frege que o pensamento ocidental efetua a virada semântico-linguística (Cf. KENNY, 2005, p.6).

juízos em questão. De fato, os princípios lógicos ou a sintaxe seriam irrelevantes para saber se um juízo deriva ou não da experiência sensível.

Ainda sobre a mesma distinção, não é claro como se pode estabelecer o vínculo entre a dimensão negativa e a dimensão positiva. I.e., a não ser pela adesão à pressupostos próprios do pensamento moderno – de autores como Descartes –, não parece haver garantia de que a origem não empírica de um juízo garanta sua necessidade e universalidade. E isso fica ainda mais complicado quando se tem em vista que, para Kant, também conceitos e intuições podem ser *a priori* (Ibid, A 320 = B 377).

Sobre a distinção entre juízos analíticos e sintéticos, é importante notar que a base moderna na qual se assenta a análise de Kant também desempenha papel fundamental. O autor não tem qualquer pudor em utilizar para sua base de definição uma imagem: conceitos podem ou não estar **contidos** (*enthalten*) uns nos outros (Ibid, A 6 = B 10). Parece bastante difícil de estabelecer com base nessa noção a sinteticidade de um juízo como "a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos"; a princípio, parece absolutamente correto afirmar que ocorre aqui a continência desejada e, de fato, Aristóteles assim pensou nos *Analíticos Posteriores* (Cf. ARISTÓTELES, 1987, 73a-74a). Parece que é próprio de um triângulo ter a soma de seus ângulos internos igual a dois ângulos retos, tanto quanto parece que é próprio dele ter três lados como parece também próprio dele ter a soma de dois de seus lados com cumprimento maior que o terceiro lado. Esse ponto fica ainda mais problemático de defender ao se analisar o exemplo aritmético oferecido por Kant no horizonte da noção de continência: parece que o número doze de fato **contém** as unidades representadas pelos números cinco e sete. Nesse caso, ainda acrescenta-se o problema da identidade: sem dúvida que 5+7=12 é pensado com identidade, afinal não é esse o significado do símbolo "="?

Por fim, é importante notar que o horizonte de produção das distinções não é paralelo. Enquanto a distinção entre os conhecimentos *a priori* e *a posteriori* versa sobre a **derivação** ou **origem** dos conhecimentos, a distinção entre juízos analíticos e sintéticos está baseada na relação entre os conteúdos dos conceitos a partir das noções de **continência** e de **identidade**. Ou seja, a aceitação de uma das distinções não necessariamente nos vincula a aceitação da outra.

O que se quer fazer notar com esses apontamentos é a que as distinções que, a princípio, parecem vias excelentes para transitar na filosofia da física, da matemática e da lógica são, na verdade, bastante instáveis. Ademais, é importante ressaltar que uma das fontes possíveis dessa debilidade é a oscilação entre o psíquico e o lógico na qual Kant parece estar transitando. Essas duas dificuldades – será mostrado – Frege pretende endereçar nos *Fundamentos da Aritmética*.

2. Teses filosófico-matemáticas do século XIX com impacto nas noções fregeanas

Dois grupos de teses filosóficas, lógicas e matemáticas apareceram no debate do século XIX que, argumenta-se aqui, exigiram que as regras para a distinção kantiana fossem modificadas: (i) o psicologismo lógico-aritmético de autores como John Stuart Mill, Wilhem Wundt e Theodor Lipps e (ii) o desenvolvimento de geometrias não-euclidianas com Franz Taurinus, Nikolai Lobachevsky, János Bolyai e Bernhard Riemmann.

2.1 O psicologismo de Mill

O psicologismo lógico-aritmético se apresentou de várias maneiras ao longo do século XIX, mas foi na pena de Mill que ganhou sua forma mais conhecida e aquela em que é diretamente criticada por Frege[4].

O pensador britânico diz em seu *System of Logic* que a lógica é simultaneamente uma arte e uma ciência. Enquanto a arte lógica é normativa, a ciência da lógica seria tanto descritiva quanto explicativa. De acordo com Mill, existe dependência entre a arte da lógica e a ciência da lógica e é nessa dependência que reside sua mais evidente tendência psicologista. A ciência da lógica faz análise de processos mentais e é, por essa precisa razão, uma ciência dependente da psicologia. Se isso não bastasse, Mill afirma que todos os fundamentos teoréticos da ciência da lógica são emprestados da psicologia e que, principalmente, essa ciência, que depende da psicologia e que faz análise de processos mentais, precisa estar incluída na justificação da arte da lógica.

Assim, para Mill – nos momentos mais intensos de suas tendências psicologistas – existe uma dependência entre psicologia e lógica; tanto no que diz respeito à ciência, quanto no que diz respeito à arte. Se isso for correto, o risco é direto e claro para a lógica: os processos mentais e as leis de associação encontram variações tão diversas quanto a diversidade dos sujeitos e, assim, a lógica não poderia nem ser genuína ciência e nem estabelecer as bases para a ciência aritmética.

[4] Existe uma disputa de interpretação acerca da exata posição de Mill. Godden e Kusch enfatizam que Mill apresenta tanto tendências psicologistas quanto tendências anti-psicologistas em suas obras. O objetivo deste projeto não é o de fazer justiça ao pensamento de Mill, mas o de mostrar como ele foi interpretado por Frege e como, por ter sido interpretado dessa determinada maneira, precisou ser respondido por Frege na forma de sua nova teoria da analiticidade (Cf. GODDEN, 2005 e KUSH, 2020).

2.2 As geometrias não-euclidianas

Desde a publicação dos *Elementos* de Euclides pareceu, para os mais diversos pensadores do ocidente, que era possível a realização do ideal clássico de ciência esboçado por Platão no *Teeteto* e desenvolvido por Aristóteles nos *Analíticos Posteriories*. Os *Elementos* apresentam uma estrutura que parte de definições, de axiomas e de postulados e que deriva desses os seus teoremas e suas proposições. Os resultados de Euclides vigoraram no ocidente, praticamente sem desafios, por mais de dois mil anos e até hoje são aplicáveis a diversos campos da matemática e da física.

Houve, todavia, uma exceção àquilo que não foi desafiado na geometria euclidiana: o quinto postulado. Muito cedo na história da geometria houve incomodo com o último e menos intuitivo dos postulados do matemático grego.

> E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado do qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Em uma versão mais moderna e mais simples para tratar da derrogação do referido postulado, pode-se reescrevê-lo como: dados um ponto A e uma reta *t*, existe apenas uma reta *r* que passa por A e é paralela a *t*.

Talvez por sua complexidade – em oposição à simplicidade dos demais postulados – o quinto postulado sofreu diversos ataques ao longo dos séculos, com os mais importantes ocorrendo a partir do século XVIII. Johann Heinrich Lambert (Cf. O'CONNOR, J. J e ROBERTSON, 2004) e Franz Taurinus (Cf. FABER, 1983, 156-162) foram os primeiros autores ocidentais à colher resultados não-euclidianos, mas, de fato, é em Lobachevsky, Bolyai e Riemman que se tem a constituição de sistemas de geometrias não-euclidianas.

Uma geometria não-euclidiana é uma geometria que derroga o quinto postulado substituindo-o por outro diverso. Lobachevsky e Bolyai, em suas chamadas geometrias elípticas, propõem a substituição do quinto postulado por um axioma hiperbólico: não há uma única reta paralela *r* que passa pelo ponto *A* e é paralela a *t*, mas infinitas. Uma consequência familiar e fácil de visualizar disso é a de que, num espaço hiperbólico, a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior a 180º. Riemann também propõe a alteração do quinto postulado, mas, diferentemente dos outros dois autores, ele estabelece que não pode haver retas paralelas. Um resultado análogo ao que acabo de citar é o de que, na geometria rimanniana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois ângulos retos.

O surgimento das geometrias hiperbólica e elíptica é determinante para a compreensão ocidental contemporânea do que vem a ser ciência. Durante milênios, a geometria euclidiana reinou soberana como a efetiva concretização do ideal clássico de ciência, não obstante, no século XIX, seu reinado chega ao fim. Não é só que podemos conceber espaços não-euclidianos, mas, o desenrolar da história mostrou, espaços não-euclidianos são utilizáveis em física e, a depender do caso, de maneira mais adequada e mais simples do que o espaço plano de Euclides. Frege não foi, de maneira alguma, indiferente a esses desenvolvimentos da geometria.

3. A noção fregeana de analiticidade nos *Fundamentos da Aritmética*

Para compreender a noção fregeana de analiticidade nos *Fundamentos da Aritmética*, além do que acaba de ser estabelecido, é preciso investigar a crítica que Frege faz, na "Introdução" dos *Fundamentos da Aritmética*, contra o psicologismo. Essa crítica aponta para o modo como Frege irá interpretar a analiticidade e a *aprioridade* e, consequentemente, indica aquilo que poderá ser mantido da noção kantiana e aquilo que deve ser abandonado. Assim, nesta última seção, tratar-se-á, em primeiro lugar, da crítica fregeana ao psicologismo e, em segundo lugar, das noções fregeanas de analiticidade e de *aprioridade*.

3.1 A crítica fregeana ao psicologismo

Após se perguntar sobre a natureza do número e sobre no que consistem as operações matemáticas, Frege inicia uma série de célebres ataques ao psicologismo. Aqui, não há interesse específico pela crítica de Frege ao psicologismo. Diversamente, há interesse pelas consequências que a crítica de Frege contra o psicologismo têm para sua noção de analiticidade.

De maneira sistemática, podem-se diferenciar quatro grandes críticas do filósofo ao psicologismo. A primeira delas ataca diretamente o psicologismo aritmético e aponta para famosa diferenciação fregeana posterior entre itens mentais e sentido (*Sinn*). A psicologia se interessa pela formação, pela ocorrência e pelas causas das representações, que são itens mentais. O primeiro problema é que essas representações nada têm a ver com aritmética. Enquanto as representações/itens mentais variam para cada sujeito e para cada horizonte cultural, as propriedades matemáticas nada têm de variáveis. Por exemplo, um matemático pode ter a representação mental do número cinco como o numeral arábico 5, outro como o numeral romano

V ou e outro, ainda, como o numeral árabe ٥. Ademais, esses numerais possuem variações em sua escrita de mão, de região por região e, ainda, de indivíduo para indivíduo. Algo muito diverso ocorre com o número cinco. Um matemático brasileiro, romano antigo ou árabe entende e assume as propriedades do número 5: que é ímpar, que é primo, que é maior do que quatro que é menor do que seis, etc (Cf. FREGE, 1974a, p. 205-206).

A segunda crítica diz respeito à ocorrência das representações na mente em oposição à verdade das proposições. Talvez tenha sido um fato do passado que Pitágoras tenha descoberto o Teorema que leva seu nome[5]. E, do ponto de vista da psicologia, pode ser interessante entender os processos psíquicos que levaram o pensador grego a chegar ao seu famoso resultado em geometria. Entretanto, isso nada tem a ver com a verdade da proposição $a^2 + b^2 = c^2$. Ainda que o pensador de Samos nunca tivesse tido o trabalho e/ou os *insights* que o permitiram chegar ao resultado geralmente atribuído à ele, continuaria sendo verdade que as somas dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa (Cf. Ibid, 1974a, p. 206).

A terceira crítica diz respeito à relação existente entre a causa da ocorrência das representações e a justificação das proposições. Das quatro críticas, essa é, sem dúvida, a mais fundamental para a noção fregeana de analiticidade – e é, provavelmente, a mais elegante. Frege nos coloca que, sem qualquer dúvida, Pitágoras não teria sido capaz de demonstrar seu teorema sem a adequada quantidade de fósforo em seu cérebro. Contudo, também sem qualquer dúvida, a quantidade de fósforo no cérebro de Pitágoras não é uma das linhas da prova em favor do Teorema. Isto quer dizer: a causa da ocorrência de um determinado pensamento não tem relação com o conhecimento, uma vez que conhecimento, desde Platão, envolve justificação e, Frege denuncia, não envolve determinação de causas de processos mentais. A noção de justificação e o modo em que ela é abordada aqui oferecem os elementos mais fundamentais para aquilo que constituirá a noção fregeana de analiticidade (Cf. Ibid, 1974a, p. 206).

A quarta objeção, por fim, estabelece uma dissenção entre o modo de ser das representações e o modo de ser das proposições aritméticas. Essa quarta objeção, menos fundamental para os objetivos presentes do que as demais, parece visar muito mais um efeito de desmoralização do psicologista do que uma genuína objeção. Representações – é natural – se desenvolvem no tempo. É característico de mentalidades humanas que sejam diversas e que tenham, em diferentes períodos históricos, também diferentes características e propriedades. Assim, Frege, por absurdo, supõe que o mesmo ocorreria com as proposições matemáticas. Diz o filósofo que, no passado, 2 + 2 deve ter resultado 3; que hoje, diferentemente, resulta 4 e; que, no

[5] Hoje temos condição de dizer que não foi assim (Cf. KATZ, 2009, p. 19)

futuro, nada impede que venha resultar 5. Como Frege assume que esse obviamente não pode ser o caso, então resta claro que proposições aritméticas e representações são coisas absolutamente diversas como são diversas psicologia e aritmética (Cf. Ibid, 1974a, p. 206).

Dois são os resultados fundamentais dessas objeções que interessam reter para o que vem a seguir. Em primeiro lugar, existe uma dissenção intransponível entre, por um lado, a causa e a ocorrência de uma representação e, por outro, a justificação de uma proposição aritmética. É absolutamente indiferente do ponto de vista aritmético se alguém ficou sabendo do Teorema Fundamental da Aritmética por estudar matemática, por ter tido aulas, por ter descoberto sozinho ou por ter essas ideias implantadas em si por um ser superior. Da perspectiva aritmética, o que interessa é a justificação do Teorema, i.e., aquilo que fundamenta a verdade da proposição. Em segundo lugar, mas ainda timidamente, as críticas de Frege servem para distinguir representações – como são as *Urteile* de Kant (2001, A 320 = B 376) – de proposições. Representações, Frege diz nos trechos seguintes do texto, são mente-dependentes e subjetivas; proposições são mente-independentes e objetivas.

3.2 Proposições analíticas e sintéticas; proposições *a priori* e *a posteriori* em Frege

O modo de avaliação fregeano para a determinação de tipos de proposição está diretamente alinhado com o que acaba de ser dito sobre representações e sobre justificação. Se proposições não são representações, é indiferente do ponto de vista de uma investigação lógico-aritmética o modo como acessamos as representações relativas a certas proposições (Cf. FREGE, 1974a, p. 210). Assim, contra Kant, não há motivo para querer saber qual a origem dos juízos, se requerem ou não experiência sensível. Tampouco o critério de continência, tão flagrantemente subjetivo, serve para determinar a analiticidade de uma proposição. Analogamente, se as causas são desimportantes, mas a justificação é fundamental, não há motivo para querer saber o quê produziu no sujeito esta ou aquela representação; se foi afecção sensível, se foi produção espontânea: tudo isso é confusão psicologista.

Para Frege, nesta segunda etapa dos *Fundamentos da Aritmética* (Ibid. 1974a, §§1-4), uma proposição só pode ser determinada como analítica ou sintética, como *a priori* ou *a posteriori* (i) a partir do estabelecimento de uma prova/demonstração da proposição avaliada e (ii) a partir da determinação da relação da verdade da proposição demonstrada com as verdades logicamente anteriores (Cf. Ibid, 1974a, p. 210). Uma vez respeitadas essas duas etapas, pode-se adequadamente determinar o tipo da proposição.

Uma proposição é analítica se, ao ser provada, descobre-se que sua verdade se fundamenta, exclusivamente, em leis lógicas ou em definições permissíveis por leis lógicas (Cf. Ibid, 1974a, p. 210-211). Diferentemente, se a demonstração permite perceber que a proposição provada é ancorada em algum campo científico específico, então a proposição é sintética.

Pode-se dizer que uma proposição é *a priori* quando sua verdade é fundamentada em proposições mais gerais que ela mesma e não em fatos particulares. Quando, alternativamente, a proposição enuncia um fato particular ou se ancora num fato particular, então a proposição é *a posteriori* (Cf. Ibid, 1974a, p. 211).

Assim, proposições geométricas são sintéticas *a priori* – o que, obviamente, não quer dizer que Frege concorda com Kant[6]. Proposições geométricas são *a priori* para Frege, pois são fundamentadas em leis gerais, mais especificamente, nos seus axiomas. Essas proposições são, também, sintéticas: se baseiam em leis específicas de um campo da ciência. Resta óbvio que essas leis são específicas de um campo da ciência pelo surgimento das geometrias não-euclidianas. O quinto postulado não pode ser uma lei geral do pensamento/da lógica como o princípio de não-contradição, pois o referido pode ser derrogado e, mesmo assim, ocorrer a manutenção do sistema geométrico, o que foi provado por Lobachevski, Bolyai e Riemann. Se se abandona momentaneamente o arcabouço conceitual fregeano, pode-se dizer que proposições geométricas são analíticas por serem baseadas dedutivamente em axiomas. E isso, obviamente, seria impensável para Kant. Para o prussiano, como foi visto (Cf. Item 1.4), é uma exigência do estabelecimento de verdades geométricas a construção dos objetos geométricos na intuição pura. Para Frege, isso nada tem a ver com proposições geométricas; essa é uma questão relevante apenas para o psicólogo.

Em contrapartida, para Frege, as proposições aritméticas são analíticas *a priori*. São *a priori*, pois, similarmente ao que ocorre com a geometria, as proposições aritméticas se baseiam em proposições mais gerais; em axiomas. Porém, e aqui em conflito explícito contra Kant, elas são também analíticas, ou seja, baseiam-se exclusivamente em leis gerais da lógica e em definições permissíveis por essas leis. Em outras palavras, e esse é o grande resultado que Frege buscará estabelecer no andamento posterior do texto: as leis da lógica e as leis da aritmética são as mesmas. O universo legal que garante a validade do *modus tollens* ou das Leis de De Morgan é o mesmo universo que garante a propriedade distributiva da multiplicação ou uma soma como 2 + 2 = 4.

[6] Para que fique claro: a presente investigação se opõe, aqui, ao que diz Kenny (Cf. 2005, p. 57) sobre Kant, não ao que o autor diz sobre Frege.

4. Considerações Finais

Neste trabalho, se supõe ter sido explicitado que a noção fregeana de analiticidade é tributária da de Kant, mas que é completamente diversa da apresentada pelo prussiano. Para Frege, proposições serem analíticas ou sintéticas/*a priori* ou *a posteriori* nada tem a ver com a representação derivar ou não da experiência sensível, ser originada ou não na experiência sensível, mas tem a ver, única e exclusivamente, com a fundamentação ou justificação da proposição.

Apresentou-se que isso é da relatada maneira, pois era urgente para Frege (i) responder ao psicologismo bem como (ii) dar conta da demanda epistemológica gerada pelas geometrias não-euclidianas. Em sua resposta ao psicologismo, Frege estabeleceu sua diferenciação entre representações e proposições e, em sua apreciação das geometrias não-euclidianas, o filósofo percebeu a não universalidade lógica do quinto postulado e, consequentemente, o caráter sintético do princípio.

Todavia, resta um elemento para ser avaliado nesta apresentação da noção fregeana. Se parece seguro afirmar que o psicologismo e as geometrias não-euclidianas foram fundamentais para a formação das noções fregeanas de analiticidade e de *aprioridade*, não fica óbvio qual é o exato papel que se pode atribuir à Teoria de Conjuntos e nisso consistirá o desenvolvimento da pesquisa que aqui se começa a delinear.

OBJETIVOS

Os objetivos da pesquisa podem ser divididos em duas partes: uma teórica e outra pedagógico-extensionista.

Do ponto de vista teórico, quer-se (i) estabelecer os elementos fundamentais para as noções fregeanas de proposição analítica e de proposição *a priori* bem como (ii) publicar esses resultados na forma de três artigos: um sobre as noções de analítico e *a priori* em Kant e Frege, um sobre a origem da Teoria de Conjuntos e outro, final, sobre a relação entre origem da Teoria de Conjuntos e as noções fregeanas de proposições analíticas e de proposições *a priori*.

De uma perspectiva pedagógico-extensionista, quer-se construir esses produtos no bojo de uma rede de estudantes. Isso será feito por meio da constituição de um Seminário Quinzenal Permanente interdisciplinar de estudos sobre as noções de análise e de *aprioridade*, pela constituição de Minicursos e pela organização e realização de um Simpósio sobre temas de Filosofia e Matemática.

PLANO DE TRABALHO

1. Direção de Seminário de Leitura e Pesquisa Quinzenal interdisciplinar e, preferencialmente, interinstitucional sobre juízos e proposições analíticas e *a priori* com participação de estudantes de Graduação e de Pós-Graduação.

   1.1 O objetivo é o de que, a partir desse seminário, os estudantes produzam apresentações de trabalho ou artigos sobre juízos e proposições analíticas, sobretudo, a partir das obras de Kant, de Frege e de Quine.

   1.2 Caso haja sucesso produtivo, o plano é o de organizar, ao final do período de vigência da pesquisa, um livro com essa produção.

2. Oferta de Curso de Extensão ou Curso de Verão sobre juízos analíticos e sintéticos e juízos *a priori* e *a posteriori* em Kant.
3. Produção de artigo sobre analiticidade e *aprioridade* na geometria em Kant e Frege.
4. Oferta de Curso de Extensão sobre as origens da Teoria de Conjuntos em Cantor.
5. Produção de Artigo sobre as origens Teoria de Conjuntos em Cantor.
6. Organização e execução de Simpósio sobre Filosofia da Matemática.
7. Produção de Artigo final sobre Teoria de Conjuntos e proposições analíticas e *a priori* nos *Fundamentos da Aritmética.*
8. Entrega do Relatório Final.

Cronograma

Bimestre Ano	**Ago-Set 23**	**Out-Nov 23**	**Dez-Jan 24**	**Fev-Mar 24**	**Abr-Mai 24**	**Jun-Jul 24**	**Ago-Set 24**	**Out-Nov 24**	**Dez-Jan 25**	**Fev-Mar 25**	**Abr-Mai 25**	**Jun-Jul 25**
Seminário	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
Minicurso Kant			X									
Artigo Kant e Frege			X	X								
Minicurso Teoria de Conjuntos					X	X						
Artigo Teoria de Conjuntos						X	X					

Organização Simpósio		X	X	X								
Realização Simpósio									X			
Conjuntos e analiticidade										X	X	
Relatório Final												X

MATERIAL E MÉTODOS

Como indicado pelos itens anteriores do presente projeto, o que há de mais fundamental nesta pesquisa será realizado mediante análise de conteúdo bibliográfico. Tal análise será efetuada em três etapas: (i) juízos e proposições analíticas em Kant e Frege; (ii) origens da Teoria de Conjuntos e (iii) o impacto da Teoria de Conjuntos para as noções fregeanas de analiticidade e de *aprioridade*. Com a formação do Seminário Quinzenal, buscar-se-á estabelecer debate entre a posição de Frege sobre analiticidade e *aprioridade* e a de autores de outros períodos da História da Filosofia, em especial, Aristóteles, Kant e Quine.

Na primeira etapa, os textos básicos serão os da *Crítica da Razão Pura* e dos *Fundamentos da Aritmética*. Para orientar a reflexão, serão utilizados, ainda, os clássicos comentários de Vaihinger, de Kemp Smith e de Paton a Kant, a obra de Coffa sobre o que ele chama de tradição semântica, o artigo de Proops sobre juízos em Kant e a interpretação de Frege produzida por Kenny.

Em um segundo momento, investigar-se-á os artigos de Cantor de 1874 e de 1879 com o auxilio do artigo de Ferreirós (2020) e dos livros de Gregersen (2011) e de Katz (2009). Buscar-se-á encontrar quais os elementos presentes na teoria desenvolvida pelo matemático que influenciaram na formação fregeana de analiticidade e de *aprioridade*.

Por fim, no terceiro momento, acessar-se-ão os já clássicos textos de Dummett (1973 e 1991) e de Sluga (1999) sobre o pensamento fregeano bem como o artigo de Gabriel (1986) sobre o filósofo. Nesta etapa, a busca será a de aprofundar e a de completar eventuais lacunas deixadas pelos outros momentos da pesquisa e de, com sorte, chegar a uma conclusão sobre a relação entre a Teoria de Conjuntos e as noções fregeanas de analiticidade de *aprioridade*.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARISTÓTELES. *Analíticos Posteriores*. Tradução Pinharanda Gomes. Lisboa: Guimarães Editores, 1987.

COFFA, J. A. *The semantic tradition from Kant to Carnap*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

DUMMETT, M. *Frege*: Philosophy of language. Londres: Duckworth, 1973.

____________. *Frege*: Philosophy of mathematics. Londres: Duckworth, 1991.

EUCLIDES. *Os elementos*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo, Editora Unesp, 2009.

FABER, L. *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry*, New York: Marcel Dekker, 1983.

FERREIRÓS, F. The Early Development of Set Theory. In: ZALTA, E. N. (Ed.) *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2020. Disponível em: https://plato.stanford.edu/entries/settheory-early/ . Acessado em 22 de maio de 2023.

FREGE, G. *Die Grundlagen der Arithmetik*: Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau: Wilhelm Koebner 1884.

________. *Os Fundamentos da Aritmética*. São Paulo: Abril Cultural, 1974a. (Os Pensadores v.36)

________. "O Pensamento: uma Investigação Lógica". In: ALCOFORADO, P. (tradutor). *Investigações Lógicas*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

________. *Sobre a justificação científica de uma conceitografia*. São Paulo: Abril Cultural, 1974b. (Os Pensadores v.36).

________. Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100 (1), p. 25-50, 1892.

GABRIEL, G. Frege als Neukantianer. *Kant Studien*, Berlim: vol. 77, p. 84-101, 1986.

GODDEN, D. M. Psychologism in the Logic of John Stuart Mill: Mill on the Subject Matter and Foundations of Ratiocinative Logic. *Journal of the History and Philosophy of Logic*, vol. 26, p. 115–143, 2005.

GOLDFARB, W. "Frege's conception of logic". In: POTTER, M., RICKETTS, T. (Eds.) *The Cambridge Companion to Frege.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010, p. 32-62.

GREGERSEN, E. *The Britannica Guide to the History of Mathematics*. Nova Iorque: Britannica Educational Publishing, 2011.

GUYER, P. *Kant and the Claims of Knowledge*. New York: Cambridge University Press, 1987.

KANT, I. *Crítica da Razão Pura*. 5ª Edição. Trad. Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

________. *Kritik der Reinen Vernunft*. Berlin e Leipzig: Walter de Gruyter & Co, 1911.

________. *Manual dos cursos de Lógica geral*. Trad. Fausto Castilho. Edição Bilíngue. São Paulo: Ed. UNICAMP, 2002.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics*. 3ª Edição. Boston: Pearson, 2009.

KENNY, A. *Frege*: An introduction to the founder of modern analytic philosophy. Oxford: Blackwell Publishers, 2000.

KESSLER, G. Frege, Mill and the foundations of arithmetic. *The Journal of Philosophy*, vol. 77, nº 2, p. 225-241, 1980.

KUSH, M. Psychologism. In: ZALTA, E. N. (Ed.) *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2020. Disponível em: https://plato.stanford.edu/entries/psychologism/ . Acessado em 22 de maio de 2023.

MILL, J. S. *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive, Being a Connected View of the Principles of Evidence and The Methods of Scientific Investigation*. 3ª Edição. Londres: Parker, Son and. Bowin, 1862.

O'CONNOR, J. J e ROBERTSON, E. F. "Johann Henrich Lambert". In: ____________ (eds.) *MacTutor*. St. Andrews: School of Mathematics and Statistics of The University of St. Andrews, 2004. Disponível em https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lambert/ . Acessado em 22 de maio 2023

PATON, H. J. *Kant's metaphysic of experience: a commentary on the first half of the Kritik der reinen Vernunft*. New York: MacMillan Company, 1936.

PROOPS, I. Kant's conception of analytic judgment. *Philosophy and the Phenomenological Research*. Vol. LXX, nº 3, p. 558-610, mai. 2005.

QUINE, W. V. O. "Two Dogmas of Empiricism: From a Logical Point of View". The Philosophical Review. Vol 60, nº 1, p. 20-43, jan. 1951.

RUSSELL, B. On Denoting. *Mind*, v. 14, p. 479-493, 1905.

SLUGA, H. D. Frege on Meaning. *Ratio (New Series)*, Cambridge. Vol. IX, p. 209–226, dez. 1996.

____________. *Gottlob Frege*. Londres: Routledge, 1999.

SMITH, N. K. *A Commentary to Kant's Critique of Pure Reason.* New York: MacMillan Company, 1923.

VAIHINGER, H. *Commentar zu Kants Kritik der Reinen Vernunft*. Stuttgart: Verlag von W. Spemann. 1881, vols. 1 e 2.