

# **Aspectos Filosóficos do Efeito Aharonov-Bohm**

Ricardo Mendes Grande

ricardomgrande@bol.com.br

Projeto de pós-doutorado a ser  
realizado no Depto. de Filosofia,  
FFLCH, Universidade de São Paulo.

Supervisor: Osvaldo Pessoa Jr.

opessoa@usp.br

# **Philosophical aspects of the Aharonov-Bohm Effect**

**Ricardo Mendes Grande**  
ricardomgrande@bol.com.br

**Supervisor: Osvaldo Pessoa Jr.**  
opessoa@usp.br

# Resumo

O tema de estudo deste projeto é o Efeito Aharonov-Bohm (EAB). Desde sua previsão pelos físicos Yakir Aharonov e David Bohm em um artigo publicado em 1959, muitos trabalhos referentes ao assunto foram publicados e a controvérsia a respeito da relevância dos potenciais em mecânica quântica não-relativística continua sendo um assunto muito discutido por matemáticos, físicos e filósofos da ciência. Vejamos, resumidamente, quais os objetivos desse trabalho de pesquisa.

- 1- Discutir a interpretação dos potenciais que são utilizados na teoria clássica do eletromagnetismo;
- 2- Entender em que sentido os potenciais são necessários à formulação matemática da mecânica quântica não-relativística ;
- 3- Explicar o porquê de determinados termos matemáticos que foram introduzidos em uma teoria como meras ferramentas computacionais serem passíveis de interpretação física;
- 4- Discutir a realidade dos potenciais e campos em mecânica quântica, visando, assim, enriquecer o debate filosófico a respeito da natureza local, ou não-local, do Efeito Aharonov-Bohm (EAB).

# Abstract

The subject of this project is the Aharonov-Bohm Effect (EAB). Since its prediction by physicists Yakir Aharonov and David Bohm in an article published in 1959, many papers on the topic have been published and the controversy about the relevance of potentials in non-relativistic quantum mechanics has been a subject much discussed by mathematicians, physicists and philosophers of science. Let us briefly expose the objectives of this work.

- 1 - To discuss the interpretation of the potentials that are used in the classical theory of electromagnetism;
- 2 - To understand the in which sense the potentials are necessary for the mathematical formulation of non-relativistic quantum mechanics;
- 3 - To explain why certain mathematical terms that were introduced in a theory as mere computational tools are capable of physical interpretation;
- 4 - To discuss the reality of the potentials and fields in quantum mechanics, in order to enrich the philosophical debate about the local or nonlocal nature of Effect of the Aharonov-Bohm (EAB).

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	1
<b>2</b>	<b>Aspectos físicos</b>	2
2.1	Campos e potenciais	2
2.2	O Efeito Aharonov-Bohm (EAB)	3
2.3	As raízes da controvérsia sobre o EAB	5
<b>3</b>	<b>Aspectos matemáticos</b>	6
3.1	O problema da quantização	6
<b>4</b>	<b>Objetivos dessa proposta de trabalho no contexto da filosofia da física</b>	7
<b>5</b>	<b>Apêndice: Diferentes abordagens do EAB</b>	9
<b>6</b>	<b>Cronograma</b>	10
<b>6</b>	<b>Referências bibliográficas</b>	11

## 1 Introdução

O tema de estudo deste projeto é o Efeito Aharonov-Bohm (EAB). Desde sua previsão pelos físicos Yakir Aharonov e David Bohm em um artigo publicado em 1959, muitos trabalhos referentes ao assunto foram publicados e a controvérsia a respeito da relevância dos potenciais<sup>1</sup> em mecânica quântica não-relativística continua sendo um assunto muito discutido por matemáticos, físicos e filósofos da ciência. Embora nossa abordagem seja de natureza epistemológica, a fim de compreendermos melhor o problema, é mister investigarmos alguns dos aspectos matemáticos e físicos mais relevantes para o EAB. Vejamos, resumidamente, quais os objetivos desse trabalho<sup>2</sup> de pesquisa.

- 1- Discutir a interpretação dos potenciais que são utilizados na teoria clássica do eletromagnetismo;
- 2- Entender em que sentido os potenciais são necessários à formulação matemática da mecânica quântica não-relativística<sup>3</sup>;
- 3- Explicar o porquê de determinados termos matemáticos que foram introduzidos em uma teoria como meras ferramentas computacionais serem passíveis de interpretação física;
- 4- Discutir a *realidade* dos potenciais e campos em mecânica quântica, visando, assim, enriquecer o debate filosófico a respeito da natureza local, ou não-local, do Efeito Aharonov-Bohm (EAB).

Sigamos, agora, com uma breve revisão de alguns dos aspectos físicos e matemáticos relacionados ao EAB.

---

<sup>1</sup>Veremos, muito em breve, que na teoria clássica do eletromagnetismo, os campos elétrico e magnético são os entes físicos responsáveis pelos fenômenos eletromagnéticos. Os potenciais surgem como ferramentas matemáticas úteis para o cômputo dos campos. Já em mecânica quântica, os potenciais parecem ser passíveis de interpretação física.

<sup>2</sup>1 e 2 se inserem no contexto do nosso trabalho de mestrado (Grande, 2005), enquanto 3 está ligado ao doutorado (Grande, 2011).

<sup>3</sup>Nosso ponto de vista é próximo ao de Magni & Valz-Griz (1994), i.e., o estudo do EAB não requer uma análise do problema fora do contexto da mecânica quântica não-relativística – porém, não concordaremos com os autores em que somente os campos possam ser passíveis de interpretação física no contexto da teoria não-relativística de Schrödinger. Apesar disso, elaboraremos um apêndice com uma classificação sucinta de várias abordagens do EAB, sejam elas no contexto da mecânica quântica relativista, ou, não.

## 2 Aspectos físicos

Antes de nos determos no papel exercido pelos potenciais em mecânica quântica, veremos de maneira bastante resumida a utilidade dos potenciais em mecânica clássica. Por “clássica”, entendemos as teorias que *não são quânticas*.

Lembre-mos de que, em seu monumental *Principia*, Isaac Newton desenvolveu a teoria que viria a ser conhecida por *mecânica newtoniana*. Ela passou por uma série de refinamentos e desenvolvimentos subsequentes, elaborados por inúmeros matemáticos, dentre eles Euler, Lagrange, Hamilton, Laplace, etc.

Quanto ao estudo dos fenômenos eletromagnéticos, Michael Faraday destacou-se no nível da empiria, sendo, inclusive, quem cunhou o termo “campo” para descrever determinados fenômenos eletromagnéticos (McMullin, 2002, p. 36). No nível da elaboração de uma teoria matemática do eletromagnetismo, destacou-se o grande gênio da física, James Clerk Maxwell, responsável pela introdução do potencial vetorial na teoria clássica do eletromagnetismo.

### 2.1 Campos e potenciais

Em vários textos clássicos de eletromagnetismo (Jackson, 1999, p. 180), os potenciais elétrico<sup>4</sup> e magnético são apresentados como ferramentas matemáticas úteis para o cálculo dos respectivos campos (elétrico e magnético). No contexto da teoria do eletromagnetismo de Maxwell, a dinâmica dos campos eletromagnéticos é descrita por um conjunto de quatro<sup>5</sup> equações acrescidas da lei da força de Lorentz. A introdução de potenciais permite reduzir à metade o número de equações de Maxwell, facilitando, então, o cálculo dos campos. O potencial  $\vec{A}$ , por exemplo, é introduzido como uma função vetorial cujo rotacional é o campo magnético  $\vec{H}$ , i.e.,  $\vec{H} = \nabla \wedge \vec{A}$ .

Visto que nos deteremos simplesmente no efeito Aharonov-Bohm magnético<sup>6</sup>, voltaremos nossa atenção apenas para o potencial magnético. Vejamos, primeiramente, um exemplo didático de um experimento físico para compreendermos a essência do EAB magnético, ao qual nos referiremos por EAB apenas.

---

<sup>4</sup>É possível dar um significado intuitivo ao potencial elétrico ao associá-lo ao trabalho realizado no deslocamento de uma carga elétrica em um campo eletrostático. Por outro lado, o significado físico do potencial magnético sempre foi um tanto obscuro.

<sup>5</sup>Escreve-se – sendo  $\rho$ , a densidade de carga,  $\vec{j}$ , a densidade de corrente,  $e$ , carga elétrica – o seguinte conjunto de equações:  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ ,  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ,  $\nabla \wedge \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ ,  $\nabla \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . E a expressão de Lorentz para a força é  $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ . Neste caso, estamos utilizando  $\vec{E}$  para denotar o campo elétrico,  $\vec{B}$ , o campo magnético;  $\vec{D}$  e  $\vec{H}$  são campos relacionados a  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , respectivamente, através das equações constitutivas do meio – ver Reitz, Milford & Christy (1982, pp. 92, 141 e 322).

<sup>6</sup>Optamos pelo EAB magnético por termos mais experiência no tema e por parecer-nos mais viável (que o EAB elétrico) estudá-lo via modelos matemáticos (Peshkin & Tonomura, 1989, p. 27).

## 2.2 O efeito Aharonov-Bohm (EAB)

Para entendermos o EAB, imaginemos o seguinte experimento. Seja  $I$  um interferômetro de dois braços (Fig.1.1). Suponhamos uma primeira situação em que um feixe de elétrons  $fe$  é emitido de uma fonte em  $I$ , sendo separado (e.g., por um obturador) e reunido em uma região de interferência  $Sc$  (e.g., uma chapa fotográfica). É sabido que, em  $Sc$ , observar-se-á um determinado padrão de interferência. Imaginemos uma segunda situação em que um solenoide (um fio condutor enrolado) se encontra na região interna ao interferômetro de modo perpendicular ao plano do interferômetro. Se o experimento descrito na situação acima for refeito, observar-se-á o mesmo padrão de interferência (referente ao experimento anterior) para o caso de não haver corrente elétrica no solenoide. Imaginemos, então, que uma bateria esteja ligada ao solenoide e que uma corrente elétrica esteja presente nele. Suponhamos, primeiramente<sup>7</sup>, que o solenoide seja um objeto ideal de comprimento infinito, de modo que o campo magnético gerado pela corrente esteja totalmente contido no interior do solenoide.

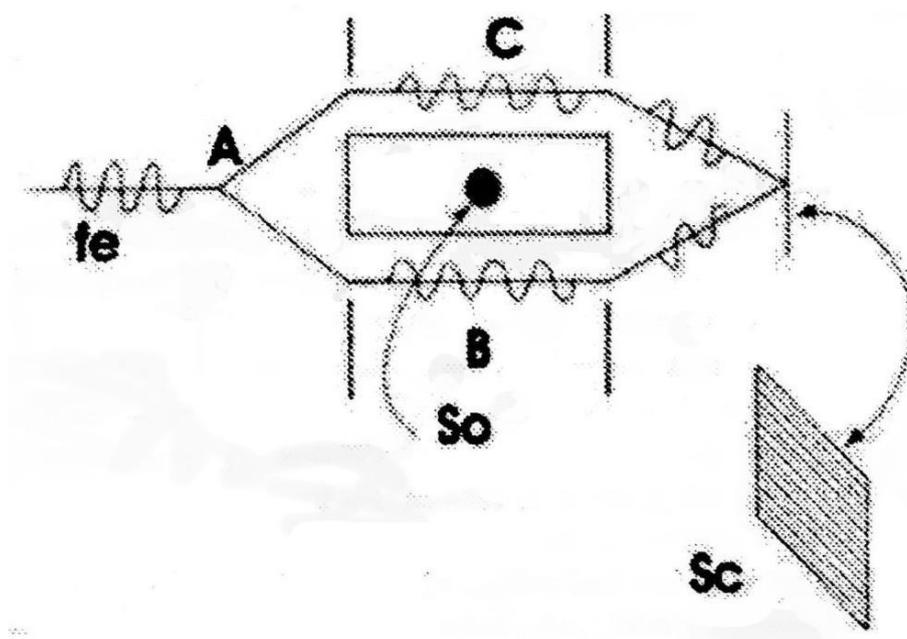


Figura 1: Interferômetro de elétrons, usado no efeito Aharonov-Bohm.

<sup>7</sup>Utilizam-se também *blindagens físicas* para evitar que haja qualquer possibilidade de as partículas sofrerem a ação de algum tipo de força devida ao campo magnético ou possíveis campos elétricos *remanescentes*. É costume utilizar o termo “solenoide blindado” para dar ênfase no fato de o campo estar completamente confinado no interior do solenoide. Caprez (2007) mostrou que não há forças agindo na partícula, o que nos leva a descartar também a hipótese de existência de algum campo *remanescente* (e.g., elétrico). Além disso, os experimentos de Tonomura (Peshkin & Tonomura, 1989; Weder & Ballesteros, 2009) já apontavam para a inexistência de campos na região de movimento da partícula. Agradecemos ao pesquisador André K.T. Assis por ter nos alertado para a existência de um campo elétrico na região externa ao solenoide – ver Torres Silva & Assis (2001) – para o caso de ele não estar *completamente blindado*. É importante dizer que os experimentos de Tonomura feitos com ímãs toroidais revestidos por materiais supercondutores excluem a possibilidade de existência de campos externos ao ímã (o qual faz o papel de um solenoide).

Agora, se for repetido o experimento acima, porém, com uma corrente elétrica passando pelo solenoide, o que seria de se esperar em  $Sc$ ? Ora, se apenas os campos forem os responsáveis por fenômenos físicos e se é o caso de o campo magnético estar (totalmente) contido no interior do solenoide (i.e., *inacessível* ao feixe) não deveríamos ser capazes de medir alterações no padrão de interferência do feixe em  $Sc$ . Mas o que se observa é uma alteração nesse padrão.

A descrição matemática do movimento de uma partícula em mecânica quântica não-relativística pode ser feita via equação de Schrödinger. Visto que, nessa equação<sup>8</sup>, as componentes do potencial vetorial é que aparecem, Aharonov & Bohm (1959) sugeriram que os potenciais poderiam se passíveis de interpretação física em mecânica quântica, diferentemente do que ocorre em mecânica clássica. Eis o que os físicos costumam chamar de efeito Aharonov-Bohm, i.e., um fenômeno de natureza quântica, empiricamente comprovado (Peshkin & Tonomura, 1989). Nosso interesse parte de uma questão aberta à discussão acadêmica, sobre a qual não há consenso, i.e., relevância dos potenciais em mecânica quântica.

Para fixar notação, suponhamos que o solenoide seja um objeto<sup>9</sup> cujo raio é denotado por  $r_0$  e centrado na origem de um sistema cartesiano ortogonal de eixos. Seja  $\vec{H}$  o vetor campo magnético confinado ao interior do solenoide. Seja  $\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_z)$  o potencial vetorial em coordenadas cilíndricas. Para o nosso exemplo, temos que:

$$A_r = A_z = 0, A_\theta = \frac{\varphi}{2\pi r} \quad (r \geq r_0 \geq 0)$$

ou

$$A_r = A_z = 0, A_\theta = \frac{\varphi}{2\pi r_0^2} \quad (r_0 > 0, r_0 \geq r \geq 0)$$

É assumida, em princípio, a validade do teorema de Stokes<sup>10</sup>, i.e., que  $\varphi = \iint \vec{H} \cdot d\vec{n} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{x}$ .

Retomemos nosso exemplo, no qual um feixe (coerente) de elétrons é enviado a partir de  $S_0$ , dividido em duas partes (ao redor do solenoide pelos braços do interferômetro), sendo, então, detectado em  $Sc$ . Dissemos haver um desvio no padrão de

---

<sup>8</sup>Aqui,  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2$ , para  $\vec{H} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2$  é operador hamiltoniano do sistema,  $\vec{p}$  é o operador de momento,  $e$ ,  $c$  e  $m$  são a carga elétrica, velocidade da luz e massa da partícula, respectivamente, e  $\vec{A}$  é o termo referente ao potencial vetorial.

<sup>9</sup>Um fio condutor enrolado (como se estivesse contido em um cilindro) e que imaginamos penetrar perpendicularmente o plano em que está contido o interferômetro. Dizemos que o solenoide se encontra na direção  $z$  do sistema de eixos.

<sup>10</sup>Retomaremos essa questão em breve, visto que não é óbvio que o teorema de Stokes seja válido para o exemplo em discussão. A primeira integral é efetuada no plano, sendo a segunda calculada sobre uma curva fechada  $\gamma$ .

interferência do feixe para o caso de existir uma corrente no solenoide, embora não<sup>11</sup> haja campos na região de movimento dos elétrons. Aharonov e Bohm utilizaram o hamiltoniano  $\vec{H} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2$  na equação de Schrödinger, como sabemos. Denotaremos tal expressão por  $\vec{H}_{AB}$ , à qual nos referiremos por *hamiltoniano do EAB*.

### 2.3 As raízes da controvérsia sobre o EAB

Chamemos de  $\rho$  a região externa ao solenoide em que se encontra uma partícula na situação descrita anteriormente, para o caso de um feixe de partículas lançado a partir de  $S_o$ , dividido em duas partes, e, finalmente, reunido em  $S_c$ . Para o caso de haver corrente elétrica no solenoide, observar-se-á um deslocamento no padrão de interferência medido em  $S_c$ . A controvérsia<sup>12</sup> sobre o EAB pode ser colocada da seguinte maneira:

- a) Os elétrons estão confinados em  $\rho$ , na qual não há campos;
- b) Para escrever a equação do movimento para as partículas é necessário saber o que se passa na região externa a  $\rho$ , i.e., na região em que se encontra o solenoide.

Vejamos isso de uma maneira precisa. Tecnicamente falando, do ponto de vista clássico, as funções hamiltonianas  $\vec{H}_G(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \vec{G}(\vec{x}))$  para<sup>13</sup>  $\vec{G}(\vec{x}) = \frac{\alpha}{\|\vec{r}\|} \vec{e}_\theta$  dão sempre origem às mesmas equações do movimento para cada número  $\alpha$ . Porém, no caso quântico, os operadores<sup>14</sup> hamiltonianos  $\vec{H}_G(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \vec{G}(\vec{x}))$  obtidos pelo procedimento canônico de quantização não são unitariamente equivalentes, o que quer dizer que poderão descrever situações físicas distintas para distintos  $\alpha$ 's. Ruijsenaars (1983) discute e elabora uma classificação detalhada dos hamiltonianos quânticos para cada  $\alpha$ . Para nós, o que é importante é o fato de a situação descrita por Aharonov e Bohm não se reduzir ao caso de  $\vec{A} = \vec{0}$  por uma transformação de gauge. O que tudo isso realmente significa? Em princípio, que o processo canônico de quantização pelo qual se obtém o hamiltoniano quântico pela substituição das variáveis clássicas por operadores auto-adjuntos não se aplica para o caso do EAB. Chamamos tal questão de *problema da quantização*, que analisaremos em seguida.

<sup>11</sup>É importante enfatizar essa questão da inexistência de forças na região de movimento da partículas (Caprez, 2007; Baatelan & Tonomura, 2009).

<sup>12</sup>Estamos nos guiando nesse ponto por Magni & Valz-Gris (1998, p. 178).

<sup>13</sup>Estamos abusando da notação, visto que  $\vec{x}$  se refere à posição de um lado da expressão para  $\vec{G}$ , enquanto  $\vec{r}$  e  $\theta$  (i.e.,  $\vec{e}_\theta$ ) também se referem à posição, porém em coordenadas polares, entretanto, na parte direita da expressão.  $\alpha$  é apenas um número.

<sup>14</sup>Embora estejamos empregando a mesma notação para ambos os casos clássico e quântico, é óbvio que elas denotam objetos matemáticos distintos.

### 3 Aspectos matemáticos

#### 3.1 O problema da quantização

Por *quantizar* entendemos qualquer procedimento matemático empregado pelos físicos para o estudo de fenômenos ligados ao mundo atômico e subatômico. Existem diversos métodos<sup>15</sup> e teorias<sup>16</sup> úteis ao estudo do movimento de partículas e que podem ser chamados de *processos de quantização*. Historicamente Heisenberg foi quem desenvolveu a primeira cinemática quântica<sup>17</sup>. Inspirado no trabalho de Heisenberg, Dirac elaborou<sup>18</sup> aquele que seria chamado de *método de quantização canônica*<sup>19</sup>. De uma maneira bastante simplificada, pode-se dizer que Dirac mostrou como é possível desenvolver uma cinemática quântica a partir de uma descrição clássica de um determinado sistema físico. Na prática parte-se das funções clássicas referentes às funções que descrevem o momento e a posição clássica das partículas do sistema físico, substituindo-as, em seguida, por operadores lineares auto-adjuntos (para detalhes técnicos, ver Alis & Engliš, 2005). A função hamiltoniana clássica dará origem a um operador linear dito *hamiltoniano*. Como é sabido pelos matemáticos, a definição de operadores requer o conhecimento de uma regra funcional e de um domínio de aplicação. Um operador linear é uma relação funcional  $O$  definida da seguinte maneira. Para o espaço vetorial  $V$  (em geral, sobre o corpo dos números complexos  $\mathbb{C}$ ), escrevemos para  $O$  -  $O: V \rightarrow V$ , de modo que  $O(\lambda\vec{v} + \vec{w}) = \lambda O(\vec{v}) + O(\vec{w})$  para<sup>20</sup>  $\vec{v}, \vec{w} \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Retomemos o exemplo acima em que há a presença de um campo magnético na região interna aos braços do interferômetro  $I$ . A função hamiltoniana utilizada para a descrição do movimento clássico das partículas é  $\vec{H}_G(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \vec{G}(\vec{x}))$ . Sabemos que Aharonov & Bohm (1959) assumem que o operador hamiltoniano quântico é obtido pelo processo de quantização canônica. Embora os autores soubessem da natureza multiplamente conexa da região em que se encontra o solenoide, eles não mostraram

---

<sup>15</sup>A título de referência, indicamos um trabalho direcionado à descrição de métodos de quantização elaborado por Alis e Engliš (2005).

<sup>16</sup>Não queremos elaborar uma classificação de métodos e teorias quânticas. A teoria de Schrödinger e de Heisenberg partem de métodos específicos de quantização e não são chamadas de “método de Schrödinger” ou “método de Heisenberg”. Por outro lado, não é costume se referir à quantização geométrica por “teoria quântica”, mas, simplesmente por “método de quantização geométrica”.

<sup>17</sup>O desenvolvimento da teoria de Heisenberg é discutido em Grande (2011, pp. 17-44). O trabalho de Schrödinger foi publicado em 1926, enquanto o trabalho de Heisenberg é de 1925.

<sup>18</sup>Ver Grande (2011, pp. 45-55) onde é analisado o artigo seminal de Dirac, “The fundamental equations of quantum theory”. Tal artigo consta nos *Annals of Royal Society* de 1925-1926.

<sup>19</sup>Sempre que nos referirmos a tal método, teremos em mente que a quantização partirá de uma descrição hamiltoniana da mecânica clássica.

<sup>20</sup>Mais precisamente, requer-se que o domínio de  $O$  (obviamente, contido em  $V$ ) seja um subespaço vetorial de  $V$  sobre  $\mathbb{C}$ .

que o operador hamiltoniano podia ser obtido por aquele processo canônico. Ora, Magni & Valz-Griz e de Oliveira se propuseram a tarefa de justificar a utilização de um potencial vetorial  $\vec{A}$  não-nulo no hamiltoniano quântico (que denotaremos por  $\vec{H}_{AB}$ ) utilizado para descrever o EAB. Tudo o que Aharonov & Bohm nos dizem é que: “[...] evidentemente, o potencial vetorial  $\vec{A}$  não pode ser zero em toda a região fora do solenoide, porque o fluxo através de todo circuito contendo a origem é igual a uma constante  $\varphi_0 = \iint \vec{H} ds = \oint \vec{A} \cdot d\vec{x}$ ” (1959, p. 486). Os físicos estão afirmando que é possível utilizar  $\vec{A}$  como sendo diferente zero por meio de uma aplicação de uma identidade matemática dita *teorema de Stokes*, a qual nos dá duas maneiras de calcular  $\varphi_0$ .

Para o caso do EAB, o campo  $\vec{H}$  está confinado no interior de uma região EXCLUÍDA do movimento da partícula e o teorema de Stokes está sendo aplicado a uma região multiplamente conexa. Tal identidade matemática se aplica<sup>21</sup> a esse tipo de região *com buraco*, desde que seja excluído o *buraco*, i.e., a região em que se encontra o campo  $\vec{H}$ . Acreditamos que essa justificativa para a utilização de  $\vec{A} \neq 0$  seja, no mínimo, dotada de uma grande circularidade, visto que o interior da região em que se encontra  $\vec{H}$  foi *retirada* do problema para que a identidade fosse válida. De Oliveira & Pereira (2007) apresentaram um procedimento matemático pelo qual é possível obter  $\vec{H}_{AB}$  sem partir da validade de Stokes. Resumidamente, eles exibem um método de quantização específico para o EAB. Quanto à relevância dos potenciais, tal questão continua aberta e não é resolvida por de Oliveira.

## 4 Objetivos dessa proposta de trabalho no contexto da filosofia da física

Na introdução ao nosso projeto, colocamos os objetivos dessa proposta de trabalho. Vejamo-los com um pouco mais de detalhes.

- 1- Discutir a interpretação dos potenciais que são utilizados na teoria clássica do eletromagnetismo

No contexto do eletromagnetismo clássico, dissemos na seção 2.1 que os potenciais elétrico e magnético são apresentados como artifícios matemáticos úteis para o cálculo dos campos. Enquanto um significado intuitivo é atribuído ao potencial elétrico, i.e., ele é interpretado como o trabalho efetuado por uma carga unitária em movimento em um campo eletrostático. Quanto ao potencial magnético  $\vec{A}$ , ele é introduzido para o cômputo de  $\vec{H}$ , ou seja,  $\vec{H} = \nabla \wedge \vec{A}$ . Visamos discutir como se deu

---

<sup>21</sup>Isso significa que para demonstrar que Stokes se aplica àquele tipo de região, redefine-se a região em que são efetuadas as integrais de modo que o *buraco* em que se encontra  $\vec{H}$  seja excluído do domínio de integração.

exatamente a introdução dos potenciais na teoria clássica do eletromagnetismo e se é possível, mesmo no contexto clássico, atribuir um determinado significado físico ao potencial eletromagnético, como sugerem Lencinella e Matteucci (2004) em *An introduction to the vector potential*.

- 2- Entender em que sentido os potenciais são necessários à formulação matemática da mecânica quântica não-relativista.

Aharonov & Bohm são enfáticos quanto à necessidade de o potencial magnético figurar nas *equações básicas* da mecânica quântica. Eles nos dizem que “Em mecânica quântica, entretanto, o formalismo canônico é necessário, e como resultado disso, os potenciais não podem ser eliminados das equações básicas”. A primeira questão que surge é: qual é o formalismo canônico a ser adotado? Em resposta a essa afirmação, de Witt (1961) publicou um artigo<sup>22</sup> em que propõe uma formulação da mecânica quântica apenas em termos de campos. Suponhamos, por um instante, que exista uma formulação matemática *razoável* da mecânica quântica não relativista em que seja possível eliminar os potenciais do formalismo da teoria. Seria, então, razoável afirmar que a relevância dos potenciais dependeriam do tipo de formulação matemática adotada para a teoria quântica? Investigaremos essa questão em nosso projeto.

- 3- Explicar o porquê de determinados termos matemáticos que foram introduzidos em uma teoria como meras ferramentas computacionais serem passíveis de interpretação física. Seguiremos de perto o trabalho filosófico de Jairo José da Silva (2010) sobre a aplicabilidade da matemática à física e nosso trabalho de doutorado.

Sabemos que o potencial magnético foi introduzido na teoria clássica do eletromagnetismo como uma ferramenta matemática para o cálculo do campo magnético. É importante explicar como um termo matemático genérico que, outrora, era destituído de interpretação, pode vir a ser interpretado fisicamente.

- 4- Discutir a *realidade* dos potenciais e campos em mecânica quântica, visando, assim, enriquecer o debate filosófico a respeito da natureza local, ou não-local, do Efeito Aharonov Bohm (EAB).

O item 2 nos leva diretamente a 4. O tipo de formulação matemática da teoria quântica pode sugerir uma determinada interpretação dos entes matemáticos presentes na teoria. Ora, se apenas campos estiverem presentes nas equações básicas, visto que o campo magnético está isolado da região de movimento da partícula, é razoável que

---

<sup>22</sup>Bastante contestado pela nítida falta de rigor matemático em suas argumentações. Outra tentativa de eliminar os potenciais se baseou em uma formulação hidrodinâmica da mecânica quântica. Dentre os autores que trabalharam com essa proposta, destacam-se Casati e Guarneri (1979). Zuchelli (1984) mostrou que a formulação hidrodinâmica mostrou-se inadequada para o estudo do EAB. O que se sabe é que não há consenso sobre a possibilidade de eliminar os potenciais de algum formalismo matemático da mecânica quântica não-relativística.

utilizemos uma interpretação não-local da teoria. Para o caso de uma formulação em que somente potenciais figurem nas equações, seria mister buscarmos uma interpretação local da teoria.

É assaz importante dizer que Caprez et al. (2007) mostraram que é possível obter o desvio obtido empiricamente no EAB por meio de uma formulação clássica do eletromagnetismo. O que queremos dizer é que isso foi feito por meio da utilização de termos matemáticos que se referem a forças. Mas, o que é surpreendente é que nenhuma força é medida empiricamente, como nos mostra Caprez et al. nesse artigo supracitado e bastante relevante para a compreensão do EAB.

É sabido que o termo *força* perde o seu significado<sup>23</sup> físico em mecânica quântica. Apesar de a compreensão do conceito de força em física não figurar dentre os objetivos básicos de nosso projeto, é necessário discuti-lo. Para isso, nos guiaremos pelo trabalho de Max Jammer (2011).

## 5 Apêndice: Diferentes abordagens do EAB

Apesar de acreditarmos não ser necessária uma análise do EAB fora do contexto da mecânica<sup>24</sup> quântica não-relativística, é interessante mostrarmos que existem várias abordagens do EAB em diferentes contextos físicos.

Conforme vimos, Aharonov & Bohm partem da equação de Schrödinger para justificar a relevância física do potencial magnético em mecânica quântica. Também sabemos que eles nos dizem que: “Em mecânica quântica, entretanto, o formalismo canônico é necessário, e como resultado, os potenciais não podem ser eliminados das equações básicas” (Aharonov & Bohm, 1959). Em resposta a essa afirmação, de Witt (1962) publicou um trabalho visando mostrar ser possível eliminar os potenciais do *formalismo canônico* da mecânica quântica. O trabalho de de Witt é interessante, porém – na nossa opinião – carece de rigor matemático.

Outras abordagens que mencionamos em nosso projeto foram aquelas devidas a Magni & Valz-Griz (1995) e de Oliveira & Pereira (2007), em que os autores visam explicar o porquê de se poder utilizar determinado operador hamiltoniano para a descrição do movimento do feixe de partículas. Esses autores tomam o formalismo de Schrödinger como canônico para as suas abordagens matemáticas no seio da teoria dos operadores lineares auto-adjuntos. Ainda nesse contexto da análise funcional e mecânica quântica não-relativística, destacam-se os trabalhos de Adami & Teta (1997) em que são obtidas todas as extensões auto-adjuntas do operador hamiltoniano para o caso restrito e ideal de solenoides cujos raios são nulos. De Oliveira & Pereira (2010)

---

<sup>23</sup>Embora seja possível falar em força média sobre uma partícula, isso em um contexto muito restrito, via teorema de Ehrenfest.

<sup>24</sup>Enfatizemos que há várias formulações dessa teoria e que não há consenso sobre a existência de uma formulação matemática da teoria em que os potenciais não figurem (explicitamente!) nas equações de movimento, como se dá, por exemplo, na formulação ondulatória de Schrödinger.

determinam algumas extensões para o caso realístico, i.e., solenoides cujos raios não são nulos.

Smicevic (2010) e Berry (1980) utilizam a equação de Dirac para o elétron em seus estudos da dinâmica do EAB. Recordemo-nos de que a equação de Dirac se aplica ao caso do movimento relativístico de um elétron. No contexto da teoria geral da relatividade, Harvey Brown (2006, p. 116) estudará o EAB, enquanto Sitenko & Mishchenko (1999) o analisarão no âmbito da teoria das cordas.

Lewis Ryder discutirá o EAB utilizando-se de conceitos da topologia e nos dirá que, no contexto de sua abordagem em mecânica quântica de campos: “[...] o elétron é influenciado somente por campos que são não nulos em regiões inacessíveis a eles” (Ryder, 1985, p. 104). Ele assume, explicitamente, que o EAB é um efeito não-local, i.e., “...isso<sup>25</sup> equivale a uma não-localidade na integral  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{x}$ ”. Gaveau, Nounou & Schulman (2011) estudam o EAB no contexto da topologia e das equações de trajetória de Feynman. Em seus livros didáticos, José Leite Lopes (2005, p. 886) e Sakurai (1996, p. 136) utilizam o EAB para ilustrar uma aplicação das integrais de Feynman – no terceiro volume de suas *Lectures on Physics*, Feynman discutirá a relevância dos potenciais em mecânica quântica e o EAB (Feynman et al., 1965). Não podemos nos esquecer das abordagens via algum tipo de *formulação hidrodinâmica* da mecânica quântica. Neste caso, buscava-se obter uma formulação matemática da mecânica quântica não relativista em que somente os campos fossem passíveis de interpretação física (Casati & Guarneri, 1979).

Há várias abordagens filosóficas do EAB, dentre as quais destacamos os trabalhos de Richard Healey (1999), Roland Omnès (1995) e de Bernard d’Espagnat (1975). Notemos que nossa abordagem não seguirá a linha de pesquisa em filosofia da física cuja ênfase é dada em aspectos lógicos – como é o caso do trabalho bastante interessante do pesquisador Décio Krause (2006).

Peshkin (1989, pp. 4-10) discutirá várias situações físicas em que o EAB ocorre, sendo o exemplo mais simples (segundo ele), aquele que é denominado por *estados ligados*. Não podemos deixar de mencionar o caso do EAB elétrico. Em nosso projeto, deixamos claro que não investigaremos esse caso. Para nossos propósitos, basta sabermos de sua existência. Visando encerrar este apêndice, é mister lembrarmos da abordagem de Caprez, o desvio no EAB é obtido por meio de um cálculo semi-clássico em que utilizam-se expressões para forças clássicas (i.e., da teoria do eletromagnetismo clássico), as quais não são medidas empiricamente (Caprez, Barwick & Baatelan, 2007).

## Cronograma

Serão necessários 2 meses para a realização do item 1º, 3 meses para o item 2º, 3 meses para o item 3º e 4 meses para o item 4º e elaboração da redação final do trabalho.

---

<sup>25</sup> O termo “isso” refere-se à citação anterior em que Ryder nos fala da influência de campos não nulos e excluídos da região de movimento do elétron são responsáveis pelo EAB.

## Referencias bibliográficas

- ADAMI, R. & TETA, A. “On the Aharonov-Bohm hamiltonian”. *Lett. Math. Phys.* **43**: 43-53 (1997).
- AHARONOV, Y. & BOHM, D. “Significance of electromagnetic potentials in quantum theory”. *Physical Review* **115** (2): 485-91 (1959).
- BATELAAN, H. & TONOMURA, A. “The Aharonov-Bohm effects: variations on a subtle theme”. *Physics Today* **62** (9): 38-43 (Set., 2009).
- BABIKER, M. & LONDON, R. “Gauge invariance of the Aharonov-Bohm effect”. *J. Phys. A: Math. Gen.* **17**: 2973-82 (1984).
- BERRY, M. V. “Exact Aharonov-Bohm wavefunction obtained by applying Dirac’s magnetic phase factor”, *Eur. J. Phys.* **1**: 240-44 (1980).
- BLANCO, R. “On a hypothetical explanation of the Aharonov-Bohm effect”, *Foundations of Physics* **29**: 693-720 (1999).
- BROWN, H. *Physical relativity – space time from a dynamical perspective*, Oxford University Press (2005).
- CAPREZ, A.; BARWICK, B. & BATELAAN, H. “A macroscopic test of the Aharonov bohm effect”, *Phys. Rev. Lett.* **99**: 210401 (2007).
- DA SILVA, J. J. “Structuralism and the applicability of mathematics”, *Axiomathes* **20**: 229-53 (2010).
- DE OLIVEIRA, C. R. & PEREIRA, M. “Mathematical justification of the Aharonov-Bohm Hamiltonian”, *Journal of Statistical Physics* **133**: 1175-84 (2008).
- DE OLIVEIRA, C. R. & PEREIRA, M. “Scattering and self-adjoint extensions of the Aharonov-Bohm hamiltonian” *Journal of Physics A: Math. Theor.* **43**: 354011 (2010).
- D’ESPAGNAT, B. *Conceptual foundations of quantum mechanics*, Perseus, New York (1999).
- FEYNMAN, R. P. & LEIGHTON, R. & SANDS, M., *Lectures on physics*, Addison-Wesley Longman, Reading (MA) (1965).
- GAVEAU, B. & NOUNOU, A.M. & SCHULMAN, L.S. “Homotopy and path integrals in the time-dependent Aharonov-Bohm effect”, *Foundations of Physics* **41**: 1462-74 (2011).
- GRANDE, R. M. *O efeito Aharonov-Bohm*, dissertação de mestrado apresentada ao Depto Matemática da UFSCar, São Carlos (2005).

- GRANDE, R. M. *A aplicabilidade da matemática à física*, tese de doutorado apresentado ao Depto Filosofia da Unicamp, Campinas (2011).
- HAMILTON, J. *Aharonov-Bohm and other cyclic phenomena*. Springer, Berlim (1997).
- HEALEY, R. “Is the Aharonov-Bohm effect local?”, em CAO, T.Y. (org.), *Conceptual foundations of quantum field theory*, pp. 298-309, Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- HEGERFELDT, G. C. & NEUMANN, J. T. “The Aharonov-Bohm effect: the role of tunneling and associated forces”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**: 1-11 (2008).
- HO, V. B. & MORGAN, J. M. “Quantum mechanics in multiply connected spaces”, *Phys. Lett.* **234**: 86-90 (1997).
- KRAUSE, D. & FRENCH, S. *Identity in physics – a historical, philosophical and formal analysis*, Clarendon, Oxford (2006).
- KREGAR, A. “Aharonov-Bohm effect”, e-print de seminário, Universidade de Ljubljana (2011).
- LEITE LOPES, J. *A estrutura quântica da matéria*, Ed. UFRJ, Rio de Janeiro (2005).
- LENCINELLA, D. & MATTEUCI, G. “An introduction to the vector potential”, *Eur. J. Phys.* **25**: 249-56 (2004).
- LIPKIN, J. H. “Fringing fields and criticisms of the Aharonov-Bohm effect”. *Physical Review D* **23**: 1466-67 (1981).
- MAGNI, C. & VALZ-GRIS, F. “Can elementar quantum mechanics explain the Aharonov-Bohm effect?” *J. Math. Phys.* **36** (1): 177-86, (1995).
- MATTINGLEY, J. “Which gauge matters?” *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **37**: 243-62 (2006).
- MCMULLIN, E. “The origin of the field concept in physics”, *Phys. Perspect.* **4**: 13-19 (2002).
- O’RAIFEARTAIGH, L. & STRAUMANN, N. E WIPF, A. “Aharonov-Bohm effect in presence of superconductors”, *Foundations of physics.* **23** (5): 703-9 (1993).
- OMNÈS, R. *Understanding quantum mechanics*. Princeton University Press, Princeton (1999).
- PESHKIN, M. & TONOMURA, A. “The Aharonov-Bohm effect”, *Lecture notes in physics* **340**, Springer, Berlin (1989).
- PESHKIN, M. “Aharonov-Bohm effect in bound states: theoretical and experimental status”, *Physical Review A*, **23**: 360-1 (1980).

- RUIJSENAARS, S. N. M. “The Aharonov-Bohm effect and scattering theory”, *Annals of Physics* **146**: 1-34 (1983).
- SIMICEVIC, N. “Dynamics of the Aharonov-Bohm effect”, artigo *on line*: <http://www.mendeley.com/research/dynamics-of-the-aharonovbohm-effect/> (2010).
- PESHKIN, M. & LIPKIN, H. J. “Topology, locality, and Aharonov-Bohm effect with neutrons”, *Physical Review Letters* **74** (15): 2847-50 (1995).
- RYDER, L.H. *Quantum field theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
- SAKURAI, J. J. *Modern quantum mechanics*, Addison-Wesley, Reading (MA) (1994).
- TORRES SILVA, H. & ASSIS, A. K. T. “The influence of the electric field outside a resistive solenoid on the Aharonov-Bohm effect”, *Revista de la Facultad de Ingenharia de la Universidad de Tarapaca* (Chile) **9**: 29-34 (2001).
- VON WESTENHOLZ, C. “On the significance of electromagnetic potentials in the quantum theory”, *Annales de L’I.H.P.* **18** (4): 353-65 (1973).
- WEDER, R. & BALLESTEROS, M. “The Aharonov-Bohm and Tonomura et al. experiments: rigorous results”, *J. Math. Phys.* **50**: 122108 (2009).
- ZUCHELLI, J. A. “Inadequacy of hydrodynamical theories of the Aharonov-Bohm effect”, *International Journal of Theoretical Physics* **23** (5): 497-415 (1984).