

**Consequências da Análise de Onduletas para a Filosofia da Mecânica Quântica:
Das relações de incerteza generalizadas à escala de Planck**

Candidato: Dr. Filipe Pamplona Nascimento Gonçalves

Supervisor: Prof. Dr. Osvaldo Pessoa Jr. (FFLCH-USP)

Instituição: **Universidade de São Paulo (USP)**: Departamento de Filosofia
da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas (FFLCH).

Resumo:

A análise de onduletas é um importante método matemático de decomposição de funções, suas aplicações abrangem uma enorme variedade de áreas. Ela permite descrever diversas funções a partir da sobreposição de “ondas locais” (funções “*wavelets*”, também traduzidas como “ondaletas”). Desenvolveu-se a partir das décadas de 1970 e 80 (com os trabalhos do geofísico francês, Jean Morlet, e do físico Alex Grossmann); seu método contrasta com a análise de Fourier, que permite a decomposição de funções através de “ondas harmônicas” (não-locais).

No contexto da mecânica quântica (ortodoxa), Niels Bohr [1927] já apontava para a importância da análise de Fourier nos fundamentos da teoria quântica: a relação complementar entre os aspectos corpusculares e ondulatórios, o princípio quântico da superposição e as relações de incerteza de Heisenberg estão intrinsecamente relacionados com o método de composição de “ondas planas harmônicas” com frequências bem definidas (monocromáticas), mas não-locais (infinitas no “espaço” e no “tempo”). No contexto contemporâneo, como a busca de uma teoria quântica causal não-linear (Croca, 2003), a aplicação da análise de onduletas ao formalismo da mecânica quântica permite resultados surpreendentes, como as *relações de incerteza generalizadas*, nas quais as relações de Heisenberg se tornam apenas um caso particular, limite.

Este projeto tem dois objetivos: o primeiro consiste em avaliar o estatuto do “princípio de incerteza” na filosofia da mecânica quântica após o advento das onduletas; e, com isso, adentra-se à filosofia do espaço para indagar: uma vez que o *comprimento de Planck* pode ser calculado através do raio de Schwarzschild e da relação de Heisenberg, a partir das relações de incerteza generalizadas, será possível construir escalas espaciais mais elementares do que a de Planck?

**Consequences of Wavelet Analysis for the Philosophy of Quantum Mechanics:
From generalized uncertainty relations to the Planck scale**

Candidate: Dr. Filipe Pamplona Nascimento Gonçalves

Supervisor: Prof. Dr. Osvaldo Pessoa Jr. (FFLCH-USP)

Institute: **University of São Paulo (USP):** Department of Philosophy,
Faculty of Philosophy, Languages and Literature, and Human Sciences (FFLCH).

Abstract:

Wavelet analysis is an important mathematical method for decomposing functions, its applications cover a huge variety of areas. It allows describing different functions based on the superposition of “local waves”, also called wavelet functions. It developed from the 1970s and 80s (with the works of French geophysicist Jean Morlet and physicist Alex Grossmann); its method contrasts with Fourier analysis, which allows the decomposition of functions through “harmonic waves” (non-local).

In the context of orthodox quantum mechanics, Niels Bohr [1927] already pointed to the importance of Fourier analysis in the foundations of quantum theory: the complementary relationship between the corpuscular and wave aspects, the quantum principle of superposition and the uncertainty relations of Heisenberg are intrinsically related to the method of composing “harmonic plane waves” with well-defined (monochromatic) frequencies, but non-local (infinite in “space” and “time”). In the contemporary context, such as the search for a non-linear causal quantum theory (Croca, 2003), the application of wavelet analysis to the formalism of quantum mechanics allows surprising results, such as generalized uncertainty relations, in which Heisenberg relations becomes only a particular limiting case.

This project has two objectives: the first is to evaluate the status of the “uncertainty principle” in the philosophy of quantum mechanics after the advent of wavelets; and, with this, we enter the philosophy of space to ask: since the Planck length can be calculated through the Schwarzschild radius and the Heisenberg relation, from the generalized uncertainty relations, will it be possible to construct spatial scales more elementary than Planck's?

Prefácio

à 2ª versão do Projeto

Este projeto foi submetido ao Departamento de Filosofia da USP no 1º semestre de 2024, pelo qual recebeu um parecer prévio parcialmente favorável, solicitando revisões. Todas as referências sugeridas no parecer foram analisadas cuidadosamente e, por fim, incorporadas ao projeto. Além disso, o parecerista levantou uma série de questões pertinentes sobre o assunto: algumas delas puderam ser tratadas no texto a seguir, mas grande parte depende do desenvolvimento da pesquisa, ou seja, será melhor abordada caso o projeto pós-doutoral possa seguir adiante e angariar investimento.

Aconselhamos o leitor a escutar “wavelets in quantum mechanics” nos mais variados sites de pesquisa acadêmica, e perceberá ser esta uma área nova e efervescente, com forte desenvolvimento nas últimas décadas. Enquanto astrônomo, tomei conhecimento das “wavelets” bem cedo na graduação, devido à sua aplicação nos estudos de processamento de sinais em imagens astronômicas (foi-me apresentado pelo Prof. Carlos Roberto Rabaça, do OV-UFRJ). Anos depois, durante o Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência, em Portugal, tive como orientador o próprio Prof. José Croca, um dos pioneiros na aplicação da análise de onduletas à teoria quântica. Embora esta não fosse a linha específica do meu projeto doutoral (sobre filosofia do espaço físico), tomei maior consciência da importância e da urgência de desenvolver esta linha temática no Brasil.

No país, constata-se que até hoje nenhum projeto de pesquisa em filosofia da ciência sobre a história e os fundamentos da análise de onduletas foi implementado, ainda menos quando aplicada aos domínios da mecânica quântica. Este projeto, portanto, tem o desafio de ser o primeiro, inaugurando a nível nacional uma linha de investigação que entre físicos e filósofos trará à luz muitas novidades, além de dialogar com diversos profissionais da matemática aplicada, da astronomia e das engenharias.

“O mundo de acordo com as wavelets” (expressão da jornalista norte-americana Barbara Hubbard) é essencialmente interdisciplinar: trata-se de uma “revolução” que começou na geofísica e na engenharia de sinais, formalizou-se na matemática aplicada e daí se alastrou para diversos campos das ciências da natureza. Nos fundamentos da física, esta inovação chega tardiamente, através de teorias alternativas e linhagens heterodoxas que colocam em causa alguns dos “paradigmas” do século XX: dentre eles, a crença de que as relações de incerteza de Heisenberg expressam um limite intransponível na natureza. O projeto assenta na convicção de que este riquíssimo cenário de “ciência extraordinária” deve ser estudado filosoficamente.

São Paulo,
21 / 11 / 2024

Sumário

- 1. Enunciado dos problemas**
 - 1.1 Análise de Fourier e as relações de Heisenberg
 - 1.2 Análise de Onduletas: as relações de incerteza generalizadas
 - 1.3 A escala espacial de Planck: como calculá-la?
 - 1.4 Justificativa do Projeto
 - 2. Resultados esperados**
 - 2.1 Resultados filosóficos
 - 2.2 Resultados científicos
 - 3. Desafios filosóficos, científicos e tecnológicos:**

Meios e métodos para superá-los
 - 4. Cronograma (2 anos)**
 - 1º Ano de investigação: fev 2025 – jan 2026
 - 2º Ano de investigação e resultados: fev 2026 – jan 2027
 - 5. Disseminação e avaliação**
 - 5.1 Disseminação: artigos, livros, dossiês, cursos e palestras.
 - 5.2 Avaliação (institucional / *reviews*)
 - 6. Outros apoios (colaboradores):**
 - Nacionais: OV-UFRJ / LLC-UFT / *Physikós*-UFMS
 - Internacionais: CFCUL / USM & Outros possíveis: UFPE / MU / UJ
 - 7. Referências Bibliográficas**
-

1. Enunciado dos problemas

*“By this time you are probably convinced that all the laws of physics are symmetrical under any kind of change whatsoever, so now I will give a few that do not work. The first one is **change of scale**.”* (FEYNMAN, 1965, p.95)

Este projeto atua no exato conjunto de interseção entre a *filosofia da mecânica quântica* e a *filosofia do espaço físico*, portanto possui o potencial de gerar contributos a estas duas linhas de investigação específicas, que se encontram na grande área da *filosofia da física*. Porém, ao tratar de uma ferramenta matemática com âmbito de aplicação tão amplo – as *wavelets* – é natural que o projeto dialogue também com outros campos de pesquisa. A partir da década de 1980, a análise local por onduletas se consolidou como uma alternativa à análise harmônica clássica (de Fourier). Neste projeto, interessa-nos as revisões e transformações que esta alternativa tem possibilitado aos fundamentos da física, sobretudo aos domínios da teoria quântica.

Ainda hoje, quando estudamos as bem conhecidas equações de Planck ($E = h\nu$) e de Louis de Broglie ($p = h/\lambda$), ao associarmos uma frequência bem definida ν e um comprimento de onda λ às propriedades da matéria (ou seja, à energia E e ao momento linear p de uma partícula quântica), é usual que adotemos por base as ondas harmônicas clássicas, não-locais (infinitas). Isso acontece quando o entendimento do que seja uma onda monocromática, de frequência bem definida, restringe-se ao paradigma das ondas harmônicas de Fourier. Logo, descrevemos as propriedades de um “pacote de ondas” a partir da superposição de ondas não-locais, o que gera indeterminações (as bem conhecidas relações de Heisenberg). A novidade da análise de onduletas, para os nossos propósitos, é que ela permite associar frequências bem definidas a “ondas locais” (finitas no espaço e no tempo). Curiosamente, a superposição desse tipo de onda acarreta graus de indeterminação diferentes daqueles obtidos pela análise harmônica clássica, possibilitando assim resoluções mais precisas. Desse modo, a primeira pergunta que podemos formular é: quando estudamos o comportamento vibratório elementar da matéria, a partir das equações de Planck e de Broglie, qual matriz ondulatória devemos utilizar na descrição dos fenômenos físicos?

Para os físicos das primeiras décadas do século XX (como Bohr, de Broglie e Heisenberg), adotar a análise de Fourier era o caminho mais simples e melhor disponível. Por outro lado, a partir do advento da análise de onduletas (ou seja, da década de 1980 em diante), os físicos passaram a dispor de muitas alternativas à análise harmônica clássica, outras “matrizes ondulatórias” – as funções wavelets permitem representar ondas de frequências bem definidas, sem para isso se valer da não-localidade. A partir da superposição de onduletas, podemos descrever diversos tipos de funções. No final da década de 1990, já temos trabalhos bem consolidados de aplicação da análise de onduletas aos fundamentos da física, a começar pela obra “*Hilbert Spaces, Wavelets, Generalised Functions and Modern Quantum Mechanics*” de Willi Hans-Steeb (1998), além do amplo compêndio organizado por J. C. van der Berg, “*Wavelets in Physics*” (1999).

Com base na interpretação realista e causal (que descende de Louis de Broglie), o Prof. José Croca demonstrou (em “*Towards a Nonlinear Quantum Physics*”, 2003) que a análise de onduletas conduz a relações de incerteza generalizadas, para além das de Heisenberg (nas quais as de Heisenberg se tornam apenas um caso particular). Atualmente, diversos trabalhos aplicam wavelets na mecânica quântica de variadas formas, em diferentes linhagens e com distintos propósitos. Por ex.: Arfaoui *et al.* (2022), em “*A Quantum Wavelet Uncertainty Principle*”, tornam a abordar formulações alternativas do princípio quântico de incerteza; Daniel J. George *et al.* (2022) abordam aplicações das wavelets ao problema do emaranhamento na teoria quântica de campos, entre outros. Enquanto projeto filosófico, devemos estar atentos a este desenvolvimento histórico, que propicia desde já uma interessante revisão dos fundamentos da física.

1.1 Análise de Fourier e as relações de Heisenberg

Por “análise de Fourier” (ou “análise harmônica clássica”) nos referimos à bem conhecida teoria das séries e transformadas de Fourier (Jean-Baptiste Joseph Fourier, em 1822, investigou tais séries em seu trabalho sobre a *teoria analítica do calor*; daí descende o nome). De modo geral, este método possibilita a decomposição de funções em séries de ondas harmônicas de frequências bem definidas (monocromáticas) [Fig.1], permitindo assim descrever diversas funções como resultados da sobreposição desse conjunto de ondas harmônicas “não-locais” [Fig.2].


$$\psi = Ae^{i(kx - \omega t)}$$


Figura 1 – Representação ilustrativa de uma onda harmônica simples (ψ), de amplitude constante (A), com frequência espacial (k) e angular (ω) bem definidas. Uma onda deste tipo é “não-local” tanto no espaço x quanto no tempo t , pois em ambas coordenadas ela se estende infinitamente.

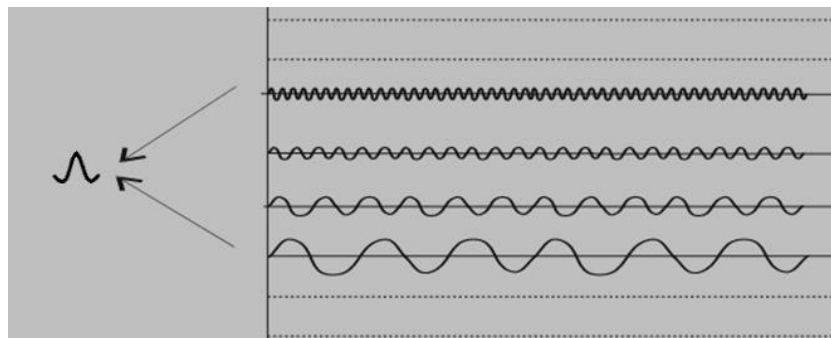
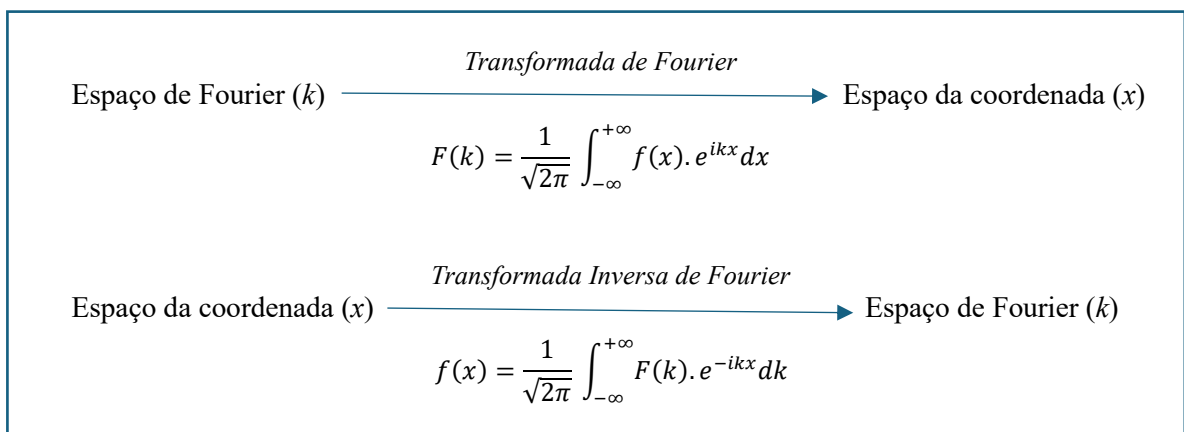


Figura 2 – Representação ilustrativa da sobreposição de ondas harmônicas (à direita), a partir das quais os padrões de interferência se anulam e resultam em uma figura “local” (à esquerda).

Niels Bohr, no célebre artigo “The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory” (1961 [1927]), promoveu a análise de Fourier a um estatuto fundamental com profundas implicações para a física. Após se referir às ondas planas harmônicas monocromáticas, Bohr começa a refletir sobre o problema da extensão infinita de tais objetos no espaço e no tempo. Em seguida, propõe o princípio da superposição com o objetivo de compor um pacote de ondas; ou, em sua terminologia, um “campo de ondas” (*wave fields*). Um pacote de ondas, então, seria uma representação matemática de uma “entidade quântica”. Como um pacote de ondas enfeixa uma multiplicidade de ondas elementares, ele terá uma multiplicidade de energias (pois para cada

onda elementar de frequência ν_n se associa uma energia E_n , tal que: $E_n = h \cdot \nu_n$). Acaba-se, nesta concepção, por interpretar uma “entidade quântica” como um objeto ao qual está associado, num mesmo instante, uma infinidade de energias. Isto inevitavelmente conduz a uma indeterminação.

É bem sabido que as relações de incerteza de Heisenberg se apresentam na forma de desigualdade e que a sua derivação se relaciona com a Transformada de Fourier: $F(k) \leftrightarrow f(x)$. Neste contexto, para a representação de uma “entidade quântica”, utiliza-se a superposição de várias ondas planas (harmônicas), associadas a uma certa distribuição para a frequência espacial k (o “número de onda”). Formalmente, uma tal composição é descrita através de uma *integral*, envolvendo vários valores de k . Esta integral representa o que se costuma chamar por Transformada de Fourier e permite realizar uma correlação entre o *espaço da coordenada* em questão (variável x) e o que designaremos por *espaço de Fourier* (variável k). Ou seja, a “Transformada de Fourier” e a “Transformada Inversa de Fourier” realizam uma correlação entre os pares de variáveis conjugadas x e k . O esquema a seguir pretende sintetizar esta noção, relacionando a passagem recíproca de um espaço para o outro, com sua respectiva transformada:



Esquema 1 – Exemplo da Transformada de Fourier (BUTKOV, 1988 [1968], p.267).

No contexto da mecânica quântica, destaca-se a importância da propriedade de dualidade entre o “espaço de fase posição-momento” e o “espaço dual de números de onda”. No caso em que se supõe uma distribuição gaussiana para as frequências espaciais k , a relação encontra o seu valor mínimo (ou seja, a Transformada de Fourier de uma “gaussiana” é também uma “gaussiana”). Em consequência deste resultado, encontra-se uma relação para “a largura a meia altura” da distribuição nas coordenadas envolvidas dada pela inequação: $\Delta x \Delta k \geq 1/2$. Se a relação de Louis de Broglie for utilizada em Δk (ou seja: $p = h / \lambda = \hbar k$, onde $\hbar = h/2\pi$ é a “constante de Planck reduzida”), obtém-se a relação do momento linear associado à direção x . No caso 3D, isto se aplica analogamente aos demais pares de coordenadas conjugadas, levando às inequações:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2 \quad [1.2]$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2 \quad [1.3]$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2 \quad [1.4]$$

As Transformadas de Fourier também permitem correlacionar a frequência com o tempo [$F(v) \leftrightarrow f(t)$], o que conduz analogamente à seguinte inequação entre as indeterminações de tempo e frequência: $\Delta t \Delta v \geq 1/4\pi$. Neste caso, quando substituirmos Δv pela energia de acordo com a equação de Planck ($E = h.v$), obtemos a relação de incerteza entre o tempo e a energia:

$$\Delta t \Delta E \geq \hbar/2 \quad [1.5]$$

A notação com a qual expressamos tais relações é recorrente nos atuais manuais de Física Moderna (como em: CARUSO & OGURI, 2006, p.470). Estas são as bem conhecidas *relações de incerteza de Heisenberg* [1.2-5]. Foram derivadas pela primeira vez em março de 1927, no célebre artigo “Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik” (*Zeitschrift für Physik* 43, 172-198). Nele, Heisenberg utiliza o formalismo da mecânica quântica matricial¹, diferente do formalismo da mecânica ondulatória, desenvolvida por de Broglie e Schrödinger, o qual daremos maior ênfase neste projeto.

Independente do formalismo adotado (seja matricial ou ondulatório), o aspecto importante a ser frisado é: tais relações de incerteza geralmente são consequências diretas da aplicação da análise de Fourier aos fundamentos da mecânica quântica. Conforme salientamos, a raiz de tais relações já nasce das equações fundamentais de Planck ($E = hv$) e de Louis de Broglie ($p = h/\lambda$), quando consideramos que v e λ “bem definidos” estão associados a ondas harmônicas clássicas. Se houvesse outras “matrizes ondulatórias” para a composição de um “pacote de ondas”, será que as entidades quânticas padeceriam das mesmas relações de incerteza? Seria a análise harmônica clássica (não-local) o único método aplicável para tal propósito? – Este panorama veio a ser alterado com o advento da *análise local por onduletas*.

¹ O papel crucial das relações de comutação desempenhado na derivação das diferentes variantes do princípio de incerteza deve ser levado em consideração, conforme o próprio artigo de Heisenberg demonstra (citaremos a trad. inglesa de Wheeler & Zurek): “Thus, the more precisely the position is determined, the less precisely the momentum is known, and conversely. In this circumstance we see a direct physical interpretation of the equation $\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = -i\hbar$. Let q_1 be the precision with which the value q is known (q_1 is, say, the mean error of q), therefore here the wavelength of the light. Let p_1 be the precision with which the value p is determinable; that is, here, the discontinuous change of p in the Compton effect. Then, according to the elementary laws of the Compton effect p_1 and q_1 stand in the relation: $p_1 q_1 \sim h$.” (HEISENBERG, 1981 [1927], p.64-5)

1.2 Análise de Onduletas: as relações de incerteza generalizadas

O formalismo das *wavelets* ganhou grande impulso a partir da década de 1980, sendo utilizado na geofísica como ferramenta teórica no auxílio à prospecção de petróleo. Jean Morlet desenvolveu esta ferramenta matemática para a eliminação de ruídos no processamento de sinais sísmicos. Mais tarde, essas tentativas foram desenvolvidas e formalizadas por Alex Grossmann e outros cientistas, até que a análise local via *wavelets* se tornou uma poderosa ferramenta matemática. Desde então, seu ramo de aplicações passou a abranger uma enorme variedade de áreas, dispondo de redefinições e propriedades bastante específicas para cada caso.

Importantes manuais introdutórios ao formalismo teórico das *wavelets* já datam do início dos anos 1990, como a obra de C. K. Chui (1992): “An Introduction to wavelets”. Ademais, uma importante abordagem histórica sobre o advento das onduletas foi escrita pela jornalista norte-americana e difusora da ciência, Barbara B. Hubbard (1998): “The world according to wavelets: the story of a mathematical technique in the making”. Assinala-se o estudo das wavelets como promissor campo interdisciplinar de pesquisa. Não tardou para que novos trabalhos começassem a repensar os fundamentos da física com base neste novo arcabouço teórico.

No artigo “Ontologia de Fourier, análise local por onduletas e Física Quântica” de J. Araújo, J. Cordovil, J. Croca, R. Moreira e A. R. da Silva (2011), o grupo da *Escola de Lisboa*² nos apresenta uma excelente introdução sobre a aplicação das *wavelets* aos fundamentos da mecânica quântica. Em linhas gerais, uma onduleta é uma onda localizada. Como objeto matemático, caracteriza-se por parâmetros de dilatação e de translação. Fisicamente, tal objeto presume a existência de uma onda finita com uma frequência bem definida (diferente da análise de Fourier, onde “ondas de frequências bem definidas” são as ondas planas harmônicas monocromáticas, infinitas no “espaço” e “tempo”). Para ilustrar, temos a “onduleta de Morlet” – caracterizada por uma frequência espacial k_0 e por uma “largura”, ou parâmetro de dilatação, σ :

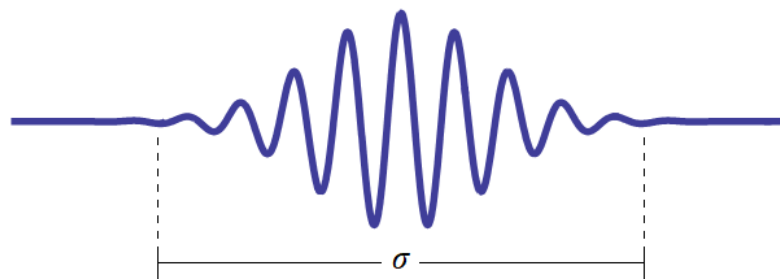


Figura 4 – Representação de uma “onduleta de Morlet” (finita e local, com dilatação σ).

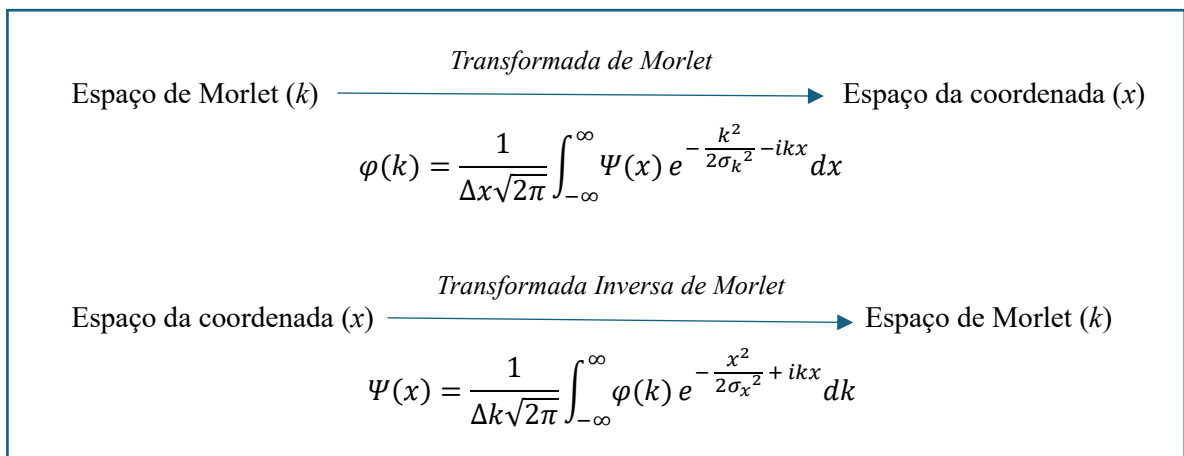
² Grupo sediado na Universidade de Lisboa e liderado pelo físico português, Prof. José Croca. Dão continuidade ao Programa de Pesquisa de Louis de Broglie, trabalhando a chamada interpretação realista e causal da mecânica quântica. Porém, atualizam-na com um formalismo não-linear que tem, por base, o advento da análise local por onduletas.

Na análise de Fourier, um pacote de ondas seria representado por uma superposição de infinitas ondas planas harmônicas (conforme propôs Bohr [1927]). Dentre os aspectos característicos das onduletas, fica explícita a localidade. Existe uma região σ dentro da qual a presença da onduleta é significativa. Entretanto, fora dessa região, referir uma “não-localidade” infinita (como a análise de Fourier o faz) não tem qualquer sentido. Deste modo, o deslocamento de uma “entidade quântica” representada por onduletas, não acarreta implicações no nível global do espaço (salvo o intervalo σ onde a sua presença é significativa).

Outro contraste com a análise de Fourier diz respeito à energia associada a uma entidade quântica. Nela, um pacote de ondas se associa a uma infinidade de energias, cada qual relacionada com uma das suas ondas elementares constituintes. Na abordagem via *wavelets*, rompe-se com esta concepção e se assume que uma “onda finita”, a “onduleta-mãe”, pode ter uma energia bem definida. Entretanto, há uma importante unificação que seu formalismo promove:

“Um resultado teórico fundamental deriva da propriedade de dilatação das onduletas, permitindo um relacionamento formal com as ondas planas harmônicas. Ou seja, quando σ , o parâmetro de dilatação, tende ao infinito, a *onduleta de Morlet* tende a uma onda plana harmônica. Nesse sentido, pode-se pensar, formalmente, as ondas planas harmônicas como casos particulares das onduletas de Morlet, no limite extremo ($\sigma \rightarrow \infty$).” (ARAÚJO *et al.*, 2011, p.443)

Neste sentido, as *wavelets* são capazes de comportar tanto uma descrição local quanto não-local, uma vez que possuem como caso limite a capacidade de descrever também ondas harmônicas não-locais. Esta preciosa característica, quando aplicada aos fundamentos da teoria quântica, é o que permite a generalização das relações de incerteza, a partir das quais a relação de Heisenberg se torna apenas um caso particular, como veremos mais adiante.



Esquema 2 – Exemplo da *Transformada de Morlet* aplicada na mecânica quântica, conforme adotadas por José Croca (2003, cap.4.6); e, mais recentemente, por Paulo Castro (2024, p.214).

Orientado por Andrade e Silva (físico português que, por sua vez, foi orientado por Louis de Broglie, com o qual trabalhou muitos anos na França), o Prof. José Croca percebeu na análise de onduletas uma importante ferramenta teórica para desenvolver uma *teoria quântica causal não-linear*. Seus trabalhos, ao longo de uma década, resultaram na importante obra: “*Towards a Nonlinear Quantum Physics*” (2003). Neste livro, discute-se a importância da análise de Fourier nos fundamentos da mecânica quântica, sua relação com o *princípio da complementaridade* de Bohr e suas implicações diretas para as relações de incerteza de Heisenberg. Em seguida, após introduzir o formalismo da análise local de onduletas, Croca demonstra como é possível se alcançar relações de incerteza generalizadas, para além das de Heisenberg. Para isso, ele adota elementos da teoria causal de De Broglie e assume uma “equação de Schrödinger não-linear” (na qual a equação linear de Schrödinger se torna apenas um caso particular):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2(\psi\psi^*)^{\frac{1}{2}}}{(\psi\psi^*)^{\frac{1}{2}}} \cdot \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad [1.6]$$

Esta equação é para o caso tridimensional, onde m é a massa associada à partícula quântica, ∇^2 é o operador laplaciano, V é a energia potencial e ψ^* expressa o complexo conjugado da função de onda ψ . Quando o termo não-linear intermediário se anula ($\nabla^2(\psi\psi^*)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$), a eq.[1.6] se reduz à usual equação linear de Schrödinger. “*Nonlinear equations of this type were presented initially by Guerra, Pusterla and Smolin. Also Gueret and Vigier following a causal approach inspired in de Broglie double solution theory arrived at a similar equation...*” (CROCA, 2003, p.76).

Após demonstrar algumas soluções particulares da equação não-linear [1.6] e propor um modelo de representação da partícula quântica com base nas *wavelets*, Croca enfim deriva um conjunto mais geral de relações de incerteza (*ibid.*, cap.4.6: pp.94-108). Aqui, para exemplificar, citaremos o caso mais simples: a base utilizada é composta por “onduletas de Morlet”, sua sobreposição constitui um “pacote de onduletas”, no qual se assume uma distribuição gaussiana para as frequências espaciais $g(k)$, caracterizada com uma “largura a meia altura dada por Δk ”. Se isso for feito, obtém-se o limite inferior das indeterminações da posição e do momento linear:

$$\Delta x^2 = \frac{\hbar^2}{\Delta p_x^2 + \frac{\hbar^2}{\sigma_0^2}} \quad [1.7]$$

Esta expressão (*ibid.*, p.104) indica uma relação que contém, do ponto de vista formal, a relação de Heisenberg como um caso particular: quando o parâmetro de dilatação da onduleta de

Morlet tende ao infinito ($\sigma_o \rightarrow \infty$), a relação entre Δx e Δp_x tende, formalmente, ao limite inferior da relação de Heisenberg, representada pela inequação [1.2]. Outro aspecto importante é: quanto menor for o parâmetro de dilatação da onduleta de Morlet (onduleta-mãe), o limite inferior dado pela relação de incerteza [1.7] se torna cada vez menor, ou seja, o produto das indeterminações entre Δx e Δp_x pode assumir valores menores do que o estabelecido pelas relações de Heisenberg. Isto, sem dúvida, rompe com um paradigma (que parecia inabalável) da teoria quântica ortodoxa. Caracteriza a *teoria quântica causal não-linear* como uma autêntica abordagem heterodoxa. Aliás, revela-nos o período de autêntica “ciência extraordinária” que abriu este século e nos alcança.

Comentários gerais:

- i. A diferença fundamental entre a análise de Fourier e a análise de onduletas é: a primeira é uma análise não-local, a segunda é local. Ou seja, ondas de Fourier são infinitas, já as onduletas são bem localizadas tanto no tempo quanto no espaço.
- ii. Nas páginas anteriores, citamos apenas a tradicional “onduleta de Morlet”; porém, existe uma ampla variedade de outras “onduletas-mães”, tanto contínuas quanto discretas, que podem servir de base para a composição e representação de diversos tipos de funções (ver: “*Wavelets: Uma Evolução na Representação de Sinais*”, OLIVEIRA, 2007, cap.3.2).
- iii. A expressão “Ontologia de Fourier” é utilizada imprecisamente por Araújo, Croca *et al.*, e pode ser melhor compreendida como uma “imagem de natureza”, no sentido de Paulo C. Abrantes (2016). Assim, não precisa se remeter a uma noção sistemática de ontologia.
- iv. A *teoria quântica causal não-linear* de Croca (2003, 2015 e 2021) é natural herdeira da tradição de Louis de Broglie, assim possui características em comum tanto com a teoria de **onda-piloto** de J. S. Bell, de Broglie e David Bohm, quanto com a *teoria da dupla solução* do L. de Broglie. Uma melhor demarcação entre as diferenças e interseções destas três teorias é um dos tópicos de desenvolvimento deste projeto; mas desde já, podemos esclarecer uma diferença fundamental – as teorias dos predecessores de Croca não aplicavam análise de onduletas nos seus fundamentos teóricos. Ou seja, o advento das *wavelets* e sua aplicação no formalismo da teoria quântica causal não-linear, é um “divisor de águas” entre a abordagem de Croca e a de seus mestres antepassados.
- v. O conceito de “pacote de onda” no contexto da análise de Fourier pode, com efeito, ser uma pedra de toque de um **princípio de correspondência** entre o âmbito clássico e o âmbito quântico. Isto se preserva na análise de onduletas (lembrando que ela é um tipo de descrição mais geral, que possui a análise de Fourier como caso particular, limite). Poder-se-ia então supor que é justamente a fusão entre a análise de Fourier e as relações de comutação da mecânica quântica que aporta o elemento propriamente ontológico à análise (esta é uma hipótese interessante a ser considerada) – e também é o que proporciona um vínculo entre as duas visões (a saber, Fourier e onduletas). Porém, isto não significa que se trata de aspectos diferentes da mesma interpretação, pois aplicar a análise de onduletas nos fundamentos de uma teoria quântica, conduz naturalmente a uma interpretação distinta daquelas que se limitavam à análise de Fourier. Este tópico carece de maior investigação.

1.3 A escala espacial de Planck: como calculá-la?

No artigo “Über irreversible Strahlungsvorgänge” (1899), Max Planck introduziu o que mais tarde ficou conhecido como a “constante de Planck”: h . Ao final, ele propôs um sistema de unidades básicas (de comprimento, tempo, massa e temperatura), consideradas “naturais”. Por ora, focaremos apenas na *unidade de comprimento*: l_p . É importante frisar que, historicamente, o seu primeiro cálculo baseou-se apenas na análise dimensional das constantes experimentais: o quantum de ação h , a constante gravitacional G e a velocidade de propagação da luz no vácuo c . (O valor no artigo de 1899 difere do atual apenas pelo fator de $\sqrt{2\pi}$, pois a moderna definição usa a constante de Planck reduzida \hbar ao invés de h). Seu valor atual é (ZYLA, 2020, p.8):

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \cong 1,616255(18) \cdot 10^{-35} \text{m} \quad [1.9]$$

Ao longo do século XX, muitas interpretações diferentes foram atribuídas ao *comprimento de Planck* (ver: JAMMER, 2010 [1993], pp.229-31, 292 e 298). A mais radical delas é considerá-lo o menor comprimento possível na natureza, um valor mínimo, contrariando a hipótese do contínuo espacial; como se o espaço físico fosse essencialmente discreto (análogo a uma “espuma”):

“A ideia de uma métrica e uma topologia flutuantes, mesmo com a possibilidade de uma variabilidade dimensional, despertou atenção quando, na década de 1960, em sua **geometrodinâmica**, Wheeler afirmou que, numa unificação da relatividade geral com a mecânica quântica, o princípio da incerteza, de Heisenberg, obrigava a geometria do espaço-tempo a funcionar como uma estrutura flutuante semelhante à espuma. “*Parece que a geometria em pequena escala deveria ser considerada como dotada de um caráter semelhante ao da espuma.*” [Wheeler, *Geometrodynamics*, 1962, nota 34, p.509] Com a análise dimensional, Wheeler mostrou, por exemplo, que as flutuações tornam-se significativas, do ponto de vista da física, na escala do “comprimento de Planck” [L_p].” (JAMMER, 2010 [1993], p.292)

Há tantos defensores quanto críticos desse tipo de concepção, que relaciona a “escala do comprimento de Planck” a algum tipo de limite infinitesimal do espaço físico, ou “quantum espacial”. Encontramos a continuidade do debate em obras contemporâneas, como Callender & Huggett (2001), R. L. Amoroso *et al.* (2002), Amelino-Camelia & K.-Glikman (2005), e M. Kachelriess (2018). Lee Smolin discute a natureza quântica do espaço em uma série de trabalhos, especialmente nos livros (2001, 2006 e 2014) e no icônico artigo publicado na *Scientific American*: “Atoms of Space and Time” (2004); republicado uma década após como “Spacetime Is Not

Necessarily Continuous – *We perceive space and time to be continuous, but if the amazing theory of loop quantum gravity is correct, they actually come in discrete pieces.*” (SMOLIN, 2004 / 2014)

Um modo bem conhecido de associar o comprimento de Planck diretamente ao encontro da teoria da relatividade geral com a mecânica quântica, é associar o raio de Schwarzschild r_S à relação de incerteza de Heisenberg [1.2], quando consideramos que $r_S \rightarrow \Delta x$:

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} \quad [1.10]$$

Como se sabe, o raio de Schwarzschild representa a extensão do horizonte de eventos que haveria caso a massa M de um corpo fosse concentrada em um único volume de dimensões infinitesimais (semelhante ao que ocorre em um buraco negro). Neste sentido, o valor r_S representa, por si só, um “tamanho limítrofe” que pode ser associado a todo corpo material.

Por outro lado, a relação de incerteza de Heisenberg atesta outro valor mínimo, que o produto da indeterminação da posição Δx de uma partícula pode ter em relação ao seu momento linear Δp_x . Se considerarmos $M = \Delta E / c^2$ e $\Delta p_x = \Delta E / c$ (momento linear de uma partícula extremamente rápida, $v \rightarrow c$), obtém-se o comprimento de Planck para: $r_S \rightarrow \Delta x \geq l_P$.

$$r_S \rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = l_P . \quad [1.11]$$

Deste modo, associa-se o raio de Schwarzschild à relação de incerteza de Heisenberg, tendo como resultado o valor mínimo de Δx igual ao comprimento de Planck. Esta ideia não é nova (já foi trabalhada por Zel’dovich & Novikov, 1971/1993, cap. 2; Hawking, 1975; entre outros). Outra interpretação proposta é que a escala de Planck poderia estar relacionada com o *cutoff* de renormalização de uma teoria “one-loop” de gravitação quântica, ou então com a escala da renormalização moderna “padrão” para a gravidade (Sakharov, 1967/1993; Visser, 2002). De todo modo, uma consideração de caráter geral que podemos fazer é que a chave para compreender e interpretar a relação entre o comprimento de Planck e o raio de Schwarzschild é entender que ela não é o foco mais central e fundamental: ela deve ser encarada como **uma consequência** de todo um complexo de outras relações conceituais que podem ser traçadas entre a teoria da relatividade geral, por um lado, e a mecânica quântica, por outro (em suas diferentes linhagens teóricas).

A questão de quais conexões podem ser traçadas entre as duas teorias foi respondida de diferentes maneiras por diferentes autores. Por exemplo, pela teoria das cordas (Veneziano, 1986); a abordagem de termodinâmica de buracos negros (Hawking 1975; Carr, 2016); ou então a

abordagem semiclássica de campos quânticos em um espaço-tempo curvo (como fazem Birrell & Davies, 1986); entre outros. Este projeto se compromete de aprofundar neste amplo estudo, com um interesse bem específico: se for possível trabalharmos com *relações de incerteza generalizadas* (nas quais as de Heisenberg se tornam apenas um caso particular), será possível calcularmos escalas espaciais mais elementares do que a de Planck?

Tudo aponta para que sim, sendo este um promissor resultado esperado do projeto. Por “escala espacial de Planck”, podemos compreender que o valor da unidade de comprimento l_P nos permite estabelecer uma escala de medida para todas as grandezas espaciais. A partir dela, podemos determinar as unidades de área [l_P^2], volume [l_P^3], além de ser um ponto de partida para o cálculo das demais unidades de Planck [*tempo*: $t_P = l_P/c$; *momento*: $p_P = \hbar/l_P$; *massa*: $m_P = p_P/c = \hbar/(c \cdot l_P)$; *energia*: $E_P = \hbar c/l_P$; entre outras]. Se houver escalas espaciais mais elementares do que a de Planck, todo este sistema de unidades pode ser ressignificado.

1.4 Justificativa do Projeto

Enfim, podemos enunciar as duas questões concatenadas que vão direto aos pontos de interesse desta pesquisa. Estabelecem duas unidades de investigação (**A** e **B**):

A) *Como podemos interpretar o “princípio quântico de incerteza” após o advento da análise de onduletas e suas atuais aplicações nos domínios da mecânica quântica?*

B) *Ao considerarmos as relações de incerteza generalizadas (propostas por Croca, 2003), será possível conceber escalas espaciais mais elementares do que a de Planck?*

As duas questões englobam uma série de questionamentos pontuais, necessária ao desenvolvimento do projeto, e devem ser compreendidas por etapas, conforme os tópicos a seguir:

- A.1 **Análise de Fourier & Mecânica Quântica:** qual o papel da “análise harmônica clássica” nos fundamentos da mecânica quântica? Quais suas implicações diretas para o “princípio de incerteza”, as relações de Heisenberg (ex.: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$)?
- A.2 O que é a **Análise de Onduletas**?
Como ela foi e está sendo aplicada aos domínios da mecânica quântica?
- A.3 O que é a “teoria quântica causal não-linear” (Croca, 2003) e por que ela possibilita calcular **relações de incerteza generalizadas**, ao aplicar *wavelets* aos fundamentos da mecânica quântica? Como as relações de Heisenberg se tornam apenas um caso particular delas? (Isto é um resultado específico desta linhagem de interpretação?)
- A.4 Qual a diferença substancial entre a descrição em termos de análise de Fourier (na mecânica quântica) e a visão de Croca *et al.* em termos de onduletas? (Analisar o conceito de “**pacote de onda**” no contexto da análise de Fourier, no âmbito da física clássica, da física quântica e o princípio de correspondência. Como interpretá-lo no contexto da análise de onduletas?)

- A.5 Em que a visão de Croca *et al.* difere da interpretação de **onda-piloto** de J. S. Bell-De Broglie-Bohm (além da *teoria da dupla solução* de Louis de Broglie)?
- A.6 Em que as **ontologias** diferem na descrição via análise de Fourier e na descrição via análise de onduletas? (E de que maneira, e em que termos, o autor do projeto entende o que vem a ser a “ontologia” de uma teoria científica?)
- A.7 Como interpretar o **princípio quântico de incerteza** após o advento das *wavelets*? Qual o impacto delas sobre as tradicionais interpretações³ da mecânica quântica?

A proposta da 1ª Unidade do Projeto assenta na clara convicção de que é preciso atualizar o debate sobre as possíveis interpretações do “princípio de incerteza” após o advento da *análise de onduletas* e, por conseguinte, avaliar suas implicações perante as distintas formulações da mecânica quântica. As *relações de incerteza generalizadas* foram propostas pelo Prof. J. R. Croca no âmbito da interpretação realista e causal, que dá continuidade ao “Programa de Pesquisa de Louis de Broglie”, mas seria este um resultado restrito a tal linhagem de interpretação? Atualmente, diferentes correntes estão a aplicar a análise de onduletas à mecânica quântica, sendo interessante observar em quais casos as relações de Heisenberg são colocadas em causa, em quais não. Obs.: as *wavelets* permitem relações mais precisas do que as de Heisenberg – dependendo do sistema físico a ser analisado, é possível se alcançar resoluções $\delta x \cdot \delta p_x$ menores do que “ $\hbar / 2$ ”, mas continua a haver incertezas e imprevisibilidade no sistema (CROCA, 2003, cap.4.6).

Em seguida, os tópicos relativos à *filosofia do espaço físico* (2ª Unidade) estão implicados com os resultados da pesquisa anterior, e dão continuidade também ao trabalho desenvolvido na tese doutoral: “Espaço & Meio Subquântico”, defendida na Universidade de Lisboa (2023).

- B.1 O que é a **escala de Planck**? E como o *comprimento de Planck* pode ser calculado? Quais os primeiros autores a propor a relação entre a escala espacial de Planck (l_p), o raio de Schwarzschild (r_s) e a relação de incerteza de Heisenberg ($\Delta x \geq \hbar / 2 \Delta p$)?
- B.2 Seria a relação entre o comprimento de Planck e o raio de Schwarzschild um fundamento ou uma consequência de outras relações conceituais, que podem ser traçadas a partir da **teoria da relatividade geral** e da **mecânica quântica** (e talvez da teoria quântica de campos)? Avaliar as propostas de diversos autores que trabalham tais conexões, com base, por ex., na teoria de cordas, na termodinâmica de buracos negros, na abordagem semiclassica de campos quânticos em um espaço-tempo curvo, etc.
- B.3 As **relações de incerteza generalizadas** permitem calcular alternativas ao *comprimento de Planck*? Se sim, como este resultado altera a nossa compreensão das escalas quânticas? E qual sua relação com a hipótese do *continuum* espacial? Por fim, se for possível construir modelos de escalas espaciais mais elementares do que a usual escala de Planck, qual será o significado físico delas? Quais suas aplicações e possíveis consequências cosmológicas?

³ Por “interpretações tradicionais”, entenda-se aquelas que se aplicam ao princípio quântico de incerteza, conforme apontadas pelo Prof. Osvaldo Pessoa Jr. em “Conceitos de Física Quântica” (2019), com atualizações: interpretações (1) *ondulatória realista*, (2) *dualista realista*, (3) *corpuscular realista*, (4) *dualista antirrealista* e (5) *instrumentalista*.

A proposta desta 2ª Unidade do Projeto (**B**) assenta na convicção de que, se for possível trabalhar modelos de escala espacial mais fundamentais do que a escala de Planck (a partir das relações de incerteza generalizadas), teremos uma “mina de ouro” para se explorar resultados com potenciais de contribuição tanto para o campo científico quanto filosófico. Contrastaremos as correntes que defendem a existência de um *quantum espacial* ($r \geq l_p$) com as que defendem o *continuum espacial*. De certo modo, se for possível calcular escalas espaciais para além da de Planck, com valores cada vez menores do que l_p , isto torna a favorecer a hipótese do *continuum*.

O debate sobre a natureza do espaço físico é amplo, e envolve questões desde o eixo tradicional de discussão, que descende de Newton e Leibniz (se o espaço existe independente dos objetos físicos, ou se é um puro sistema de relações entre eles: substantivismo vs relacionismo); quanto questões no eixo contemporâneo (se o espaço físico é um conceito fundamental, ou se é uma estrutura emergente de processos físicos mais fundamentais). Na tese doutoral, o candidato deste projeto defendeu a *perspectiva relacional do espaço físico* (descendente das concepções de Leibniz, Ernst Mach, Hans Reichenbach, Adolf Grünbaum e, atualmente, Lee Smolin, André Assis e José Croca). A partir deste projeto pós-doutoral, espera-se contribuir diretamente ao eixo contemporâneo da questão, indagando se o espaço é um conceito fundamental ou emergente.

Justificativa A: é preciso urgentemente atualizar o debate em filosofia da mecânica quântica sobre as possíveis interpretações do *princípio quântico de incerteza*, com base no advento das *wavelets*. No Brasil, grande parte deste debate ainda é travado com base nas interpretações dos físicos da 1ª metade do século XX; este projeto abre a possibilidade de trazermos a temática avançada das décadas de 1980 em diante, para a pauta de uma filosofia da física alinhada com a prática científica do presente. Novas interpretações trarão novos resultados à filosofia e ao ensino da física quântica: há possibilidades para além das relações de Heisenberg, é preciso investigá-las.

Justificativa B: o candidato deste projeto trabalhou por anos em uma tese doutoral que assentou as bases necessárias para esta investigação, é preciso desenvolvê-la adiante. O debate sobre a natureza do espaço físico incide diretamente nos problemas da incompatibilidade entre a mecânica quântica e a teoria da relatividade geral. De modo particular, se provarmos ser possível construir escalas espaciais mais elementares do que a de Planck, “via onduletas”, este projeto pode fornecer uma alta contribuição ao entendimento do que seja a emergência espaço-temporal, permitindo reavaliar as teorias do “*quantum espacial*” em face à hipótese do *continuum*.

Justificativa geral: são grandes os desafios de estudo e a instrumentalização para esta pesquisa interdisciplinar, mas se o projeto for colocado em marcha, o seu âmago de contribuição abrange diversas áreas, tendo alto potencial de produzir resultados tanto filosóficos quanto científicos, na interface de uma ferramenta matemática aplicada pelas engenharias: as *wavelets*.

2. Resultados esperados

Ao longo do capítulo anterior, ao enunciar os problemas, abordamos alguns dos resultados esperados do projeto. Convém sistematizá-los nos tópicos a seguir (**A+**, **A-**, **B+**, **B-**):

2.1 Resultados filosóficos – no contexto das interpretações do “princípio de incerteza”, com base no advento da análise de onduletas: se constatarmos que as relações de incerteza de Heisenberg não são um “veredito final” na mecânica quântica, de que as *relações de incerteza generalizadas* podem ter implicações mais gerais, para além do contexto da interpretação realista e causal na qual foram primeiramente demonstradas; então diversas linhagens de interpretação do princípio de incerteza precisam ser urgentemente revisadas e possivelmente reformuladas.

O resultado positivo deste projeto (**A+**), consiste em oferecer uma nova interpretação do princípio quântico de incerteza, não mais baseada na análise de Fourier em seus fundamentos, mas na análise de onduletas, portanto alcançando implicações mais gerais. Por outro lado, o resultado negativo (**A-**), também contribuidor, consiste no amadurecimento da pesquisa revelar que as *relações de incerteza generalizadas* são de fato um resultado particular da linhagem de interpretação realista e causal da mecânica quântica não-linear (trabalhada por J. R. Croca e a *Escola de Lisboa*), e que não possuem necessariamente implicações às demais linhagens de interpretação. Neste caso, as relações de Heisenberg se manterão no cânone das demais linhagens, e nossa pesquisa terá resultado favorável ao seu estatuto ortodoxo.

De todo modo, do ponto de vista da filosofia da ciência, isto nos revela o profundo momento de “ciência extraordinária” que vivemos, no qual fundamentos de uma teoria bem sucedida por 1 século estão sendo colocados em causa: um último resultado esperado desta 1ª unidade (**A**) consiste de desenvolver uma análise epistemológica (com base em Kuhn, Popper e Lakatos) sobre a “história e filosofia da análise de onduletas na mecânica quântica”, além de poder contribuir também a uma primeira abordagem sobre a “história das *wavelets* no Brasil” (compreender como esta linha de pesquisa foi implementada nos nossos institutos de engenharia, matemática aplicada e ciências da natureza; neste sentido, relatos de professores e pesquisadores pioneiros, como o engenheiro Hélio Magalhães da UFPE e o matemático Pedro A. Morettin da USP, nos serão valiosos).

2.2 Resultados científicos – no contexto das teorias do espaço físico: após revisar o estatuto do comprimento de Planck, o resultado positivo (**B+**) do projeto consiste na possibilidade de desenvolvermos um **modelo quântico de escala espacial**, que terá por base as relações de incerteza generalizadas e o raio de Schwarzschild, para enfim demonstrar que é possível se estabelecer escalas espaciais mais elementares que l_p , de modo que o “quantum espacial” não pode ser arbitrariamente definido com base no comprimento de Planck. A pesquisa pode resultar em modelos de escalas menores que l_p , ou então tornar a fortalecer a hipótese do contínuo espacial. O resultado negativo (**B-**), mas contribuidor, será tal estudo reforçar o emprego da escala de Planck, caso a pesquisa revele que as relações de incerteza generalizadas não viabilizam tal propósito.

3. Desafios filosóficos, científicos e tecnológicos: meios e métodos para superá-los

Esta pesquisa tem caráter interdisciplinar e majoritariamente teórico; seus desafios envolvem a capacitação didática e instrumental para lidar com um objeto de análise matemática, com ampla aplicação na física, astronomia e engenharias, somado ao estudo na interface com a filosofia. É a partir da análise epistemológica e da investigação ontológica que questionamos tanto a natureza das entidades quânticas, quanto “qual a real natureza do espaço físico?” (Relacional ou substancial, emergente ou fundamental, contínuo ou discreto, pleno ou vazio, etc.) – A formação do candidato (astrônomo, doutor em lógica e filosofia da ciência) possibilita se lançar neste desafio, na esperança de alcançar contributos aos fundamentos da física e à filosofia da natureza.

Desafios filosóficos – a literatura sobre as linhagens de interpretação da mecânica quântica é vastíssima (inclusive no Brasil, dentre os ramos da filosofia da física, sem dúvida, a filosofia da mecânica quântica é a mais trabalhada e desenvolvida). Porém, há uma extrema lacuna com relação a trabalhos que avaliem filosoficamente o emprego da análise de onduletas aos fundamentos da mecânica quântica: desde as obras de Wili Hans-Steeb (1998), J. C. Berg (1999) e J. R. Croca (2003, 2010 e 2015), aos trabalhos de John Ashmead (2012) e S. Arfaoui *et al.* (2022), passando por artigos que aplicam *wavelets*, por exemplo, ao contexto da teoria quântica de campos: como Daniel George *et al.* (2022); entre muitos outros. Com base na vasta literatura científica a ser abordada, acredita-se que este projeto possa ter o “pioneirismo” (no Brasil), para o campo da filosofia da física, de analisar epistemologicamente a temática das onduletas na mecânica quântica.

Desafios científicos – o objetivo avançado do projeto é alcançar um contributo ao entendimento da natureza do espaço nas escalas quânticas, para daí adentrar ao debate se o espaço é um conceito fundamental, ou uma estrutura emergente de processos físicos mais fundamentais. Para tal propósito, importantes obras editadas nos dão base para levar tal discussão adiante: Callender & Huggett (2001), R. Amoroso *et al.* (2002), Amelino-Camelia & Kowalski-Glikman (2005) e, mais recentemente, Michael Kachelriess (2018) e J. R. Croca (2021). No entanto, a ideia de vincular as relações de incerteza generalizadas ao cálculo de novas escalas espaciais é original deste projeto. Tal hipótese será avaliada criticamente ao longo do amadurecimento da pesquisa.

Desafios tecnológicos – curiosamente, há uma componente tecnológica a ser investigada neste projeto, que envolve uma geração avançada de microscópios, especialmente os de *super-resolução de tunelamento quântico*, abordados por J. R. Croca (2003, cap.3). Eles alcançam resoluções mais precisas do que os microscópios comuns (que utilizam *análise de Fourier* na descrição da formação de imagens) e possibilitam exemplos concretos de medidas que vão além dos limites impostos pelas relações de incerteza de Heisenberg (CROCA, 2003, cap.4.8; 2013, cap.6).

4. Cronograma (2 Anos)

Caso este projeto pós-doutoral conquiste os necessários subsídios para um regime de dedicação integral de trabalho, estima-se que ele seja realizado no prazo de dois anos, sendo o primeiro dedicado majoritariamente à Unidade A – ou seja, ao estudo da análise de onduletas na mecânica quântica; e o segundo dedicado ao problema da Unidade B – sobre a natureza do espaço.

Previsão de início (do pós-doc na USP): março, 2025

Conclusão do projeto: fevereiro, 2027

1º Ano de Investigação (março 2025 – fevereiro 2026): Unidade A

- Pesquisa: aprofundamento nas questões A.1-7 (págs.15-16);
- Escrita de novos textos com base nas respostas alcançadas diante dos problemas A.1-7;
- Organização de seminários para o Departamento de Filosofia da USP; em especial, para o *Grupo de Filosofia das Ciências Físicas* (FiCiFi-USP), liderado pelo Prof. Osvaldo Pessoa Jr.
- Elaboração de um *workshop* de “Introdução à Filosofia do Espaço Físico” (3 aulas)⁴.
- Participação em congressos, conferências e simpósios. Por ora, já temos previsto:
 - 1º Meeting do GT de Filosofia das Ciências Físicas: evento remoto, junho, 2025;
 - 14th Principia International Symposium (UFSC): *Florianópolis*, 28-31 de julho, 2025;
 - XVLIII Reunião Anual da SAB (*Sociedade Astronômica Brasileira*): set-out, 2025;
- Colaboração e org. dos *Seminários Physikós de Filosofia da Física e da Cosmologia* (online), do Grupo *Physikós*-UFMS, em parceria com a UERJ, CFCUL e UNL;
- Participação remota nos Seminários do Grupo de *Lógica, Linguagem e Ciência* da UFT;
- Desenvolvimento dos artigos decorrentes do “Plano de Publicações da Tese” (ULisboa)⁵;
- Publicação do livro: “Espaço & Meio Subquântico: Livro I – *Os Tipos de Espaço*”.

2º Ano de Investigação e Resultados (março 2026 – fevereiro 2027): Unidade B

- Pesquisa: aprofundamento nas questões B.1-3 (pág.16);
- Escrita de novos textos com base nas respostas alcançadas diante dos problemas B.1-3;
- Oferecer um *Curso Livre* aos alunos da USP (8 aulas), sobre “Filosofia do Espaço”;
- Continuidade das atividades de org. e participação de Seminários: USP / *Physikós* / LLC-UFT;
- Organização da “II Semana Internacional de Filosofia da Física e da Cosmologia” (2026);
- Participação em congressos, conferências e simpósios (nacionais / internacionais);
- Atividades de extensão e difusão: colégios, planetários, museus e revistas difusoras;
- Publicação dos resultados da pesquisa pós-doutoral **A** (2025) / **B** (2026): artigos, caps. e livros;
- Publicação do livro: “Espaço & Meio Subquântico: Livro II – *Substantivismo vs Relacionismo*”.

⁴ Proposta de *workshop* “itinerante”, que possa ocorrer na USP e depois ser oferecido a outras instituições do Brasil.

⁵ Por exigência da Univ. de Lisboa, a tese “Espaço & Meio Subquântico” foi depositada **inédita** (em 06/12/2023). A publicação dos seus novos artigos listados (em: PAMPLONA, 2023, p.260-1), somados aos Livros I e II da tese, decorrerá ao longo dos anos de 2024 e 2026. Espera-se publicá-los com atualizações da pesquisa pós-doutoral na USP.

5. Disseminação e avaliação

A seguir, menciona-se brevemente o modo de disseminação dos resultados do projeto, aqui traçado como uma “meta mínima” de produtividade a ser alcançada e, possivelmente, superada.

5.1. Disseminação: *artigos, livros, dossiês, cursos e palestras.*

Artigos: cada unidade (A e B) deste projeto há de produzir pelo menos três artigos – 1 internacional, 1 nacional e 1 voltado à difusão da pesquisa; totalizando **6 artigos** ao longo dos dois anos subsidiados pela pesquisa pós-doutoral. [Juntos à série de artigos oriundos da tese doutoral.]

Livros: esta pesquisa dá continuidade aos resultados do doutorado, por isso além de apoiar a publicação dos Livros I e II da tese “Espaço & Meio Subquântico”, os novos resultados fomentarão a escrita e futura publicação do “Livro III – Espaço fundamental vs Espaço emergente”, desenvolvido ao longo do pós-doutorado e almejado como resultado final do amadurecimento deste programa de pesquisa, sobre a natureza do espaço físico, a filosofia da mecânica quântica e a análise de onduletas.

Dossiês: por ora, temos previstos 2 dossiês de chamada internacional de artigos, que serão viáveis à disseminação dos resultados desta pesquisa; o primeiro, organizado pelo Supervisor deste projeto em parceria com os Profs. Vinícius Carvalho e Erickson Santos (UFMS) – “*Realismo e Antirrealismo na Física Moderna*” (revista “*Em Construção*”, UERJ, 2025). O segundo será org. pelo próprio candidato, cogita-se lançá-lo pela *Revista Perspectivas* da UFT – “*Filosofias do Espaço, Tempo e Espaço-tempo*” (2026), em parceria com os colaboradores deste projeto.

Cursos: esta pesquisa oferecerá dois tipos de cursos (estipulados no Cronograma). O primeiro será um *workshop* de “Introdução à Filosofia do Espaço Físico”, que consiste em apenas 3 módulos de aulas / palestras oferecidas primeiramente à USP e depois, possivelmente, a outras instituições do Brasil. O segundo consiste de um curso livre de 8 aulas sobre “Filosofia do Espaço”, a ser oferecido exclusivamente aos alunos da USP, no 2º ano do Cronograma.

Palestras: em congressos, seminários, simpósios, colóquios, escolas, etc., contemplando atividades de disseminação da pesquisa avançada e atividades de ensino, extensão e divulgação.

5.2. **Avaliação** (institucional / *reviews*): esta pesquisa será avaliada de modo contínuo pelo Departamento de Filosofia da FFLCH-USP. Seus resultados serão examinados pelas comissões científicas, *reviews* das revistas e meios de publicação dos trabalhos; por fim, os colaboradores do projeto (listados a seguir) também podem contribuir à avaliação dos resultados da pesquisa.

6. Outros apoios

O projeto deve ser submetido à FAPESP: caso aprovado, seu subsídio há de suprir todas as necessidades vitais à pesquisa pós-doutoral, além da estrutura interna da USP, ambiente favorável à excelência da pesquisa. Este projeto possui uma coesa “rede de colaboração” em torno do seu tema. A seguir, destaco os professores e pesquisadores que já confirmaram sua colaboração:

- Prof. Dr. **Carlos Roberto Rabaça** (OV-UFRJ): astrônomo, trabalhou com *wavelets* aplicadas ao processamento de imagens astronômicas; professor do Observatório do Valongo, que apresentou tal temática ao candidato deste projeto pela 1ª vez, em 2006.
- Prof. Dr. **Eduardo Simões** (LLC-UFT): lógico e filósofo da ciência, seu apoio fortalece a disseminação dos resultados do projeto através dos Seminários LLC-UFT, com atual liderança no *Grupo de Trabalho em Filosofia das Ciências Físicas* da ANPOF, além da colaboração enquanto membro do conselho editorial da Revista *Perspectivas-UFT*.
- Prof. Dr. **José Croca** (CFCUL): físico, foi orientador do candidato e segue sendo uma forte referência neste projeto, por seus contributos originais à física e à filosofia da natureza.
- Prof. Dr. **Hélio Magalhães de Oliveira** (UFPE): engenheiro elétrico e pesquisador, um dos pioneiros na pesquisa sobre *wavelets* no Brasil, autor de dois livros fundamentais: “*Análise de Fourier e Wavelets: Sinais Estacionários e não Estacionários*” (2007); e “*Análise de Sinais para Engenheiros: uma abordagem via wavelets*” (2008).
- Prof. Dr. **Vinícius Carvalho da Silva** (UFMS): filósofo da ciência, há de colaborar com a parceria em artigos, seminários e dossiês, além do apoio do *Grupo de Pesquisa Physikós* (UFMS / CNPq): *Estudos em História e Filosofia da Física e da Cosmologia*, no qual é líder.
- Dr. **Diogo Belloni** (USM): brilhante astrônomo da nossa geração, que tem contribuído a esta pesquisa por sua rica experiência pós-doutoral, com projetos bem-sucedidos pelo INPE / FAPESP. É atual pesquisador pela *Universidad Técnica Federico Santa María*, no Chile.
- Dr. **Paulo Castro** (CFCUL): filósofo da física, colabora com a interpretação realista e causal da mecânica quântica não-linear, trabalhada pela *Escola de Lisboa*.

Por fim, há um professor emérito da USP, matemático, que produziu uma das obras magnas do Brasil sobre o tema – o Prof. Dr. Pedro A. Morettin: “*Ondas e Ondaletas: da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas de Séries Temporais*” (2014 [1999]). Esperamos contactá-lo, assim como os pesquisadores internacionais que citamos neste projeto, com especial atenção ao Daniel George (Univ. Mcquarie) da Austrália e ao Willi-Hans Steeb (Univ. de Joanesburgo) da África do Sul.

“*Going to try with a little help from my friends.*”
(Lennon / McCartney)

7. Referências Bibliográficas

- ABRANTES, Paulo C. (2016). *Imagens de natureza, imagens de ciência*. 2ª ed. Rio de Janeiro: EdUERJ.
- AMELINO-CAMELIA, G. & KOWALSKI-GLIKMAN, J. (eds.) (2005). *Planck Scale Effects in Astrophysics and Cosmology*. Berlim: Springer.
- AMOROSO, R., HUNTER, G., KAFATOS, M. e VIGIER, J-P. (eds.) (2002). *Gravitation and Cosmology: From the Hubble Radius to the Planck Scale*. Nova York: Kluwer.
- ARAÚJO, J., CORDOVIL, J., CROCA, J., MOREIRA, R. e SILVA, A. (2011), Ontologia de Fourier, análise local por onduletas e Física Quântica. Em: Freire Jr., Pessoa Jr. e Bromberg (eds.), *Teoria Quântica: Estudos Históricos e Implicações Culturais*. Campina Grande: Ed.UEPB / SP: Livraria da Física, pp.437-451.
- ARFAOUI, S. *et al.* (2022), A Quantum Wavelet Uncertainty Principle. *Fractal Fract* (6), 8.
- ASHMEAD, John (2012), Morlet Wavelets in Quantum Mechanics. *Quanta* (1), 1 (Nov 15), pp.58-70.
- BELL, J. S. (2004). *Spekable and unspeakable in quantum mechanics. Collected papers on quantum philosophy*. 2ª ed. Cambridge: at University Press.
- BERG, J.C. (1999). *Wavelets in Physics*. Cambridge (U.K.): University Press.
- BIRRELL, N.D. & DAVIES, P.C.W. (1982). *Quantum fields in curved space*. Cambridge: at Univ. Press.
- BOHM, D. & VIGIER, P. (1954), Model of the Causal Interpretation of Quantum Theory in Terms of a Fluid with Irregular Fluctuations. *Phys. Rev.* 96, 209 (Out 1).
- BOHM, David (1980). *Wholeness and the implicate order*. Londres: Routledge.
_____ (1989 [1951]). *Quantum Theory*. Nova York: Dover.
- BOHR, N. (1961 [1927]), The quantum postulate and the recent development of atomic theory. Em: *Atomic Theory and the Description of Nature*, Cambridge: University Press (Cap.II: pp.52-91).
- BRIGGS, John S. (2022), Trajectories and the perception of classical motion in the free propagation of wave packets. *Natural Sciences*, v.2, issue 2 (April), e20210089. <https://doi.org/10.1002/ntls.20210089>
- BROGLIE, Louis de (1960). *Non-linear Wave Mechanics: A Causal Interpretation*. Amsterdã: Elsevier.
_____ (1964). *The Thermodynamics of the Isolated Particle (or the hidden Thermodynamics of Particles)*. Paris: Gauthier-Villars.
_____ (1987 [1972]), Interpretation of Quantum Mechanics by the Double Solution Theory. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, vol.12, n.4, pp.1-23.

- _____ (1990 [1950-1952]). *Heisenberg's Uncertainties and the Probabilistic Interpretation of Wave Mechanics – with Critical Notes of the Author*. Dordrecht: Kluwer.
- BUTKOV, E. (1988 [1968]). *Física Matemática* (trad. J. Carvalho). Rio de Janeiro: Ed. Guanabara Koogan.
- CALLENDER, C. & HUGGETT, N. (eds.) (2001). *Physics Meets Philosophy at the Planck Scale: Contemporary Theories in Quantum Gravity*. Cambridge: University Press.
- CARR, Bernard J. (2016). The black hole uncertainty principle correspondence. In: P. Nicolini *et al.* (eds.), *1st Karl Schwarzschild meeting on gravitational physics* (pp.159-167). New York: Springer.
- CARUSO, F. & OGURI, V. (2006). *Física Moderna: Origens Clássicas e Fund. Quânticos*. RJ: Elsevier.
- CASTRO, P. (2024). The Wave-Memory Interpretation of Quantum Mechanics. In: P. Castro, J. Bush and J. Croca (eds.), *Advances in Pilot Wave Theory: from Experiments to Foundations*. Boston Studies in Philosophy and History of Science (344). Cham: Springer (pp.189-226).
- CHAWHAN, P. & RATABOLE, R. (2020), Quantum Mechanics in Wavelet Basis. Em: arXiv:2010.06945v1 [Out 14].
- CHUI, C. K. (1992). *An Introduction to wavelets*. San Diego (Califórnia): Academic Press.
- CROCA, J. R. (2003). *Towards a Nonlinear Quantum Physics*. Londres: World Scientific.
- _____ & ARAÚJO, J. (eds.) (2010). *A New Vision on Physics*. Lisboa: CFCUL.
- _____ (2013), Quantum indeterminism: a direct consequence of Fourier ontology. *Proc. SPIE 8832 – The Nature of Light: What are Photons?*, V, 88320Y (Out 1).
- _____ (2015). *Eurhythmic Physics or Hyperphysics, the Unification of Physics*. Sarburgo: Lambert.
- _____ (2021). *Beyond Space and Chronological Time. The Physics of Becoming*. Chisinau: Lambert.
- ENGLERT, B. (2024), Uncertainty Relations Revisited. *Physics Letters A*, vol. 494, 129278 (Jan 15).
- ÉVORA, Fátima R. R. (ed.) (1995). *Espaço e Tempo*. Campinas: Coleção CLE.
- FEYNMAN, Richard (1965). *The Character of Physical Law*. Cambridge, Massachusetts: M.I.T. press.
- _____ *et al.* (1963). *The Feynman Lectures on Physics*. Menlo Park, Califórnia: Addison-Wesley.
- GEORGE, Daniel J. *et al.* (2022), *Entanglement in quantum field theory via wavelet representations*. Em: arXiv:2201.06211v4 [Set 29].
- GHINS, Michel (1991). *A Inércia e o Espaço-tempo Absoluto: de Newton a Einstein*. Campinas: Col.CLE.
- GRÜNBAUM, A. (1973 [1963]). *Philosophical Problems of Space and Time*. 2ª Ed. Dordrecht: D. Reidel.
- HAWKING, S. W. (1975), Particle creation by black holes. *Comm. Math. Phys.* 43, pp.199-220.

HEISENBERG, W. (1981 [1927]). The Physical Content of Quantum Kinematics and Mechanics [trans. by Wheeler & Zurek, from the original in *Zeitschrift für Physik* 43, 172-198.]. In: J. A. Wheeler & W. H. Zurek (eds.) (2014 [1983]), *Quantum Theory and Measurement*, Princeton: at University Press (pp.62-84).

HUBBARD, B. B. (1998). *The world according to wavelets: the story of a mathematical technique in the making*. 2ª Ed. Boca Ratón: CRC Press (Taylor & Francis).

JAMMER, M. (1974). *The philosophy of quantum mechanics: the interpretations of quantum mechanics in historical perspective*. Nova York: John Wiley & Sons.

_____ (1989). *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. 2ª Ed., Los Angeles: Tomash.

_____ (2010 [1993]). *Conceitos de Espaço: A história das teorias do espaço na física*. RJ: Contraponto.

KACHELRIESS, Michael (2018). *Quantum Fields: From Hubble to the Planck Scale*. Oxford: Univ. Press.

KOGA, Toyoki (1972), The Motion of Wavelets. An Interpretation of the Schrödinger Equation. *Foundations of Physics*, vol.2, n.1, pp.49-78.

KÖRNER, S. (1970). *Categorical frameworks*. New York: Barnes & Noble.

LITTLEJOHN, R. G. (1986), The semiclassical evolution of wave packets. *Phys. Rep.* 138 (4-5), 193-291.

LOMBARDI, Anna M. (2002), Different velocities in wave trains: early definitions and interpretations. *J. Optics B: Quantum & Semiclass*, Opt.4, S473-S476.

MORETTIN, Pedro A. (2014 [1999]). *Ondas e Ondaletas: da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas de Séries Temporais*. 2ª ed., São Paulo: EdUSP.

OLIVEIRA, Hélio M. (2007a). *Análise de Fourier e Wavelets: Sinais Estacionários e não Estacionários*. Recife: Ed. Universitária, UFPE.

_____ (2007b). *Análise de Sinais para Engenheiros: uma abordagem via Wavelets*. Rio de Jan.: Brasport.

PAMPLONA, F. (2023). *Espaço e Meio Subquântico: A Filosofia do Espaço físico à luz da Hyperphysis*. Tese Doutoral em Lógica e Filosofia da Ciência. Orientadores: Profs. José Croca, João Cordovil e Rui Moreira, Universidade de Lisboa. [Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/64194>]

PESSOA JR., Osvaldo (2010), Bells Theorem and the Counterfactual Definition of Locality. *Manuscrito – Rev. Int. Fil.*, Campinas, v.33, n.1, p.351-364.

_____ (2013), Emergência e Redução: Uma introdução histórica e filosófica. *Ciência e Cultura*, São Paulo, v.65, n.4, pp.22-26.

_____ (2019a,b). *Conceitos de Física Quântica, Vols. 1(a) e 2(b)*. 4ª Ed., São Paulo: Livraria da Física.

_____ (2023), Leis de Ponte na Filosofia da Mente e nas Ciências Físicas. *Trans/Form/Ação*, Marília, v.46, pp.405-420, Ed. Especial 1.

- PLANCK, Max (1899), Über irreversible Strahlungsvorgänge. Em: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (5): pp.440-480.
- POLYZOU, W. N. (2020), Wavelet representation of light-front quantum field theory. *Physical Review D*, 101 (9), 096004: pp.1-25.
- RABAÇA, Carlos R. *et al.* (2005). Planetary Nebulae and Wavelet Transform. In: *International Conference on Planetary Nebulae as Astronomical Tools, Gdansk*. Torun: AIP Conf. Proceedings 804, v. 1. pp. 28-34.
- REICHENBACH, Hans (1944). *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*. L.A.: UCalifornia Press.
 _____ (1958 [1927]). *The Philosophy of Space & Time*. Nova York: Dover.
- SAKHAROV, A. (1991 [1967]), Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation [original: *Sov. Phys. Doklady* 12 (1968), 1040-1041]. Reeditado em: *Sov. Phys. Uspekhi* 34 (5), 394.
- SILVA, Vinícius C. (2014). O “princípio de incerteza” de Werner Heisenberg e suas interpretações: ontológica, epistemológica, tecnológica e estatística. *Scientiarum Historia VII*, v.1, p.1-8.
- SMOLIN, Lee (2001). *Three Roads to Quantum Gravity*. Nova York: Basic Books.
 _____ (2004), Atoms of Space and Time. *Scientific American*, 290(1), pp.66–75. Republicado em 2014: Spacetime Is Not Necessarily Continuous. *Scientific American* (Out 24).
 _____ (2006). *The Trouble with Physics. The Rise of String Theory, the Fall of a Science, and What Comes Next*. Nova York: Houghton Mifflin.
 _____ & UNGER, R. M. (2014). *The Singular Universe and the Reality of Time. A Proposal in Natural Philosophy*. Cambridge: University Press.
- STEEB, Willi-Hans (1998). *Hilbert Spaces, Wavelets, Generalised Functions and Modern Quantum Mechanics*. Dordrecht: Springer.
- TANG, Jau (1996). *De Broglie Wavelets versus Schrödinger Wave Functions. A Ribbon Model Approach to Quantum Theory and the Mechanisms of Quantum Interference*. U.S.: Argonne National Laboratory.
- VENEZIANO, G. (1986), A stringy nature needs only two constants. *Europhys. Lett.* 2(3), 199-204.
- VISSER, Matt (2002), Sakharov’s induced gravity: A modern perspective. *Mod. Phys. Lett. A* 17 (15-17), 977-991.
- WHEELER, J. A. (1962). *Geometrodynamics*. Milão (Itália): Academic Press.
- ZEL’DOVICH, Ya. B. & NOVIKOV, I. D. (1993 [1971]). *Relativistic astrophysics, Vol. I – Stars and relativity*. Mineola, NY: Dover.
- ZYLA, P. A. *et al.* (2020). *Particle Physics Booklet* [Review of Particle Physics]. Publicado online pelo PTEP e disponível no PDG (Particle Data Group) website: <http://pdg.lbl.gov>